ISSN 2075-9827

КМП

Карпатські математичні публікації

CARPATHIAN MATHEMATICAL PUBLICATIONS

КАРПАТСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПУБЛИКАЦИИ

Том 3

№ 1

2011

Карпатські математичні публікації
Науковий журнал

Друкується за рішенням Вченої ради
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Факультет математики та інформатики
національний університет
фаника
57
анківськ

com
u.if.ua

икарпатський національний університет
імені Василя Стефаника, 2011

Карпатські математичні публікації

НАУКОВИЙ ЖУРНАЛ
Т.3, №1
2011

Зміст

Carpathian mathematical publications

SCIENTIFIC JOURNAL

V.3, №1

2011

CONTENTS

Карпатские математические публикации

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Т.3, №1

2011

СОДЕРЖАНИЕ

Карпатські математичні публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №1

УДК 512.54

Artemovych O.D., Skaskiv L.V.

GROUPS ASSOCIATED WITH BRACES

Artemovych O.D., Skaskiv L.V. *Groups associated with braces*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 4–14.

We construct the group $H(A)$ associated with a brace A and investigate the properties of $H(A)$.

Introduction

Let $(A, +)$ be an abelian group with a multiplication "$\cdot$". As in [5] we call A a brace if A is right distributive, i.e.

i) $(a+b)\cdot c = (a\cdot c) + (b\cdot c)$ for all $a, b, c \in A$, and

ii) A is a group with respect to circle operation "$\circ$" defined by the rule

$$a \circ b = a + b + a \cdot b.$$

A group $(A, \circ)$ is called the adjoint group of a brace A and denoted by A°. It is easy to see that

$$a \circ 0 = 0 = 0 \circ a$$

and so 0 is the neutral element of A°. The inverse of $a \in A$ will be denoted by $a^{(-1)}$.

An abelian group $(M, +)$ is called a module [6] (with the neutral element e) over a brace A if there exists a mapping

$$M \times A \ni (x, a) \mapsto xa \in M$$

such that the following hold for any elements $x, y \in M$ and $a, b \in A$:

$m_1)$ $(x+y)a = xa + ya$,

$m_2)$ $x(a \circ b) = (xa)b + xa + xb$,

$m_3)$ $x0 = e$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 16W35.
Key words and phrases: brace, nilpotent group.

Since

$$ea = (e+e)a = ea + ea,$$

we conclude that

$$ea = e$$

for any $a \in A$. In view of $x + (-x) = e$ we also obtain that

$$0 = ea = (x + (-x))a = xa + (-x)a$$

and therefore

$$(-x)a = -(xa) = -xa.$$

A non-empty set $L \subseteq M$ is called a submodule of a module M if the following two conditions hold:

$s_1)$ L is a subgroup of $(M, +)$,

$s_2)$ $la \in L$ for any $l \in L$ and $a \in A$.

Let A be a brace, L a submodule of an A-module M, T a subgroup of A°. On the set of pairs

$$H(L, T) = \{(l, t) \mid l \in L, t \in T\}$$

we define a multiplication by the rule

$$(x, y)(u, v) = (xv + x + u, y \circ v) \tag{1}$$

for $x, u \in L$ and $y, v \in T$. Then $H(L, T)$ is a group (see Lemma 1). We prove the following

Theorem 1. *Let M be a module over a brace A, L a non-zero submodule of M, T a non-zero subgroup of A°. Then*

$$H = H(L, T) = E \rtimes F$$

is a Frobenius group with a kernel E and a complement F, where E is isomorphic to the additive group L^+ of L and F is isomorphic to a subgroup T, if and only if the following hold:

(i) $L = Lh$ *for every non-zero element* $h \in T$,

(ii) $\operatorname{ann}_T l = \{t \in T \mid lt = e\} = \{0\}$ *for every non-zero element* $l \in L$.

Recall [5] that

$$A^{n+1} = A(A^n)$$

and

$$A^{(n+1)} = (A^{(n)})A$$

for any positive integer n. Then A^n is a right ideal and $A^{(n)}$ is a two-sided ideal in A. A brace A is called right nilpotent (respectively left nilpotent) if $A^{(n)} = \{0\}$ for some positive integer n. A minimal positive integer n with this property is called an index of right (respectively left) nilpotency. In this way we obtain the following

Theorem 2. (1) *If A is a non-zero left nilpotent brace, then*

(i) *$H(A)$ is a nilpotent group;*

(ii) $\operatorname{ann} A \neq \{0\}$.

(2) *If A is a right nilpotent brace, then $H(A)$ is a solvable group.*

Henceforth, $H \lhd G$ means that H is a normal subgroup of a group G and $E \rtimes F$ is a semidirect product of groups E, F with a normal subgroup E.

Any unexplaned terminology is standard as in [4].

1. The group associated with a brace. It is not difficult to prove the following

Lemma 1. *Let M be a module over a brace A. If L is a submodule of M and T is a subgroup of A°, then*

$$H = H(L,T) = E \rtimes F$$

is a group with the identity element $(e,0)$ under the operation (1) and, moreover, $E = \{(l,0) \mid l \in L\}$ is isomorphic to the additive group of L and $F = \{(e,t) \mid t \in T\}$ is isomorphic to T.

Proof. It is easily verified that $H(L,T)$ is a group, for any $a, l \in L$, $b \in T$

$$(a,b)^{-1} = (-a - ab^{(-1)}, b^{(-1)}) \in H$$

and

$$(a,b) = (e,b)(a,0) \in EF,$$

$$(l,0)^{(a,b)} = (a,b)^{-1}(l,0)(a,b) = (-a - ab^{(-1)}, b^{(-1)})(l,0)(a,b) = (lb + l, 0) \in E,$$

so E is a normal subgroup of H,

$$E \cap F = \{(e,0)\}.$$

Hence $H = E \rtimes F$ is a semidirect product. Finally, the maps

$$\varphi : L \ni l \mapsto (l,0) \in E \text{ and } \psi : T \ni t \mapsto (e,t) \in F$$

are group isomorphisms. □

Corollary 1. *A group $H(L,T)$ is abelian if and only if $LT = \{e\}$ and T is an abelian group.*

A non-empty set S is called a subbrace of of a brace A (see [6]) if the following hold:

s_1) $(S,+)$ is a subgroup of $(A,+)$,

s_2) $uv \in S$ for any $u, v \in S$.

It is obviously that $\{0\}$ and A are trivial subbraces in A. Since A can be regarded as A-module, every submodule I of A-module A is called a right ideal of A [5] (there is no similar concept of a left ideal). Therefore I is a right ideal of A if and only if the following hold:

i_1) $(I,+)$ is a subgroup of $(A,+)$,

i_2) $ia \in I$ for any $i \in I$ and $a \in A$.

If, moreover, I satisfies the condition

i_3) $ai \in I$ for any $i \in I$ and $a \in A$,

then I is called a two-sided ideal (for short an ideal) of A. Any (right or two-sided) ideal of A is a subbrace in A. For any brace A

- the left annihilator
$$\operatorname{ann}_l A = \{u \in A \mid uA = \{0\}\}$$
is a right ideal of A,

- the right annihilator
$$\operatorname{ann}_r A = \{v \in A \mid Av = \{0\}\}$$

is a two-sided ideal of A. In [5] $\operatorname{ann}_r A$ is denoted by $\operatorname{Soc}(A)$. Obviously that $\operatorname{ann} A = \operatorname{ann}_r A \cap \operatorname{ann}_l A$ is a two-sided ideal in A. Element $a \in A$ is called a left (respectively right) zero divisor if it satisfies the following two conditions:

z_1) $a \neq 0$,

z_2) $ab = 0$ (respectively $ca = 0$) for some non-zero element $b \in A$ (respectively $c \in A$).

Element $a \in A$ that is a left and a right zero divisor is called a zero divisor of A.

Remark 1. *If a brace A is left distributive, then A becomes a radical ring (i.e., an associative ring which is a group with respect to the circle operation "$\circ$"). The group $H(A^+, A^\circ)$, where A is a radical ring, was constructed by Ya.P.Sysak [1] and called the associated group of a radical ring A. Similarly, we will say that the group $H(A) = H(A^+, A^\circ)$ is associated with a brace A.*

Lemma 2. *Let A be a brace with the associated group $H(A) = E \rtimes F$. If S is a subbrace of A with the associated group $H(S) = U \rtimes W$, then the following conditions hold:*

(1) *$H(S) \leq H(A)$, $U \leq E$ and $W \leq F$,*

(2) *if S is a right ideal of A, then $U \lhd H(A)$,*

(3) *if S is an ideal of A, then $U \lhd H(A)$ and $H(S) \lhd H(A)$,*

(4) *if $U \lhd H(A)$, then $SA \subseteq S$,*

(5) *if $H(S) \lhd E \rtimes W$, then $AS \subseteq S$,*

(6) *the centralizers*

$$C_E(F) = \{(a,0) \in E \mid a \in \operatorname{ann}_l A\} \text{ and } C_F(E) = \{(0,u) \in F \mid u \in \operatorname{ann}_r A\};$$

in particular, is A not contains left and right zero divisors, then

$$C_F(E) = C_E(F) = \{(0,0)\}.$$

Proof. (1) follows from definition of $H(A)$.

(2) Let S be a right ideal of A. Then $sa \in S$ for any $s \in S$, $a \in A$ and so

$$(s,0)^{(a,b)} = (-a - ab^{(-1)}, b^{(-1)})(s,0)(a,b) = (sb + s, 0) \in U \tag{2}$$

for any elements $(a,b) \in H(A)$ and $(s,0) \in U$. This means that U is a normal subgroup of $H(A)$.

(3) Assume that S is an ideal of A, $(a,b) \in H(A)$ and $(s,t) \in H(S)$. Then

$$\begin{aligned}(s,t)^{(a,b)} = (&-(at)b - at - ((ab^{(-1)})t)b + sb + s - (ab^{(-1)})t, \\ &t + tb + (b^{(-1)}t)b + b^{(-1)}t) \in H(S),\end{aligned}$$

and hence $H(S)$ is normal in $H(A)$.

(4) Since $U \lhd H(A)$, from (2) it follows that $sb + s \in S$ for any $s \in S$, $b \in A$ and therefore $sb \in S$.

(5) Let us $H(S) \lhd E \rtimes W$. Then for any $a \in A$ and $u, v, w \in S$ we deduce that

$$\begin{gathered} H(S) \ni (u,v)^{(a,w)} = \\ (-(av)w - ((aw^{(-1)})v)w - aw - (aw^{(-1)})w + uw - av- \\ (aw^{(-1)})v - aw^{(-1)} + u, w^{(-1)} \circ v \circ w) = \\ (-(av)w - ((aw^{(-1)})v)w + uw - av - (aw^{(-1)})v + u, v + vw + (w^{(-1)}v)w + w^{(-1)}v). \end{gathered}$$

If $w = 0$, then we obtain that $(-av + u, v) \in H(S)$, and so $AS \subseteq S$.

(6) Assume that $(a,0) \in C_E(F)$. Then $(a,0)(0,b) = (0,b)(a,0)$ for every $b \in A$ and consequently $ab = 0$. If $(0,u) \in C_F(E)$, then

$$(0 \cdot 0 + 0 + b, u \circ 0) = (0,u)(b,0) = (b,0)(0,u) = (bu + b + 0, 0 \circ u)$$

and therefore $bu = 0$. □

Lemma 3. *If A is a brace and $a, b \in A$, then $(a,b) \in Z(H(A))$ if and only if $aA = \{0\}$ and $Ab = \{0\} = bA$.*

Proof. ($\Rightarrow$) Let us $(a,b) \in Z(H(A))$. Then for any elements $u, v \in A$ we see that

$$(av + a + u, b \circ v) = (a,b)(u,v) = (u,v)(a,b) = (ub + u + a, v \circ b) \tag{3}$$

if and only if

$$\begin{aligned} b \circ v &= v \circ b, \\ av &= ub. \end{aligned}$$

Hence $bv = vb$. If $u = 0$, then $av = 0$ (and we obtain that $aA = \{0\}$). In the case $v = 0$ it follows that $ub = 0$ (and consequently $Ab = \{0\}$).

($\Leftarrow$) Since $ub = 0 = av$ for any $u, v \in A$, we conclude that $(u,v) \in Z(H(A))$. □

Remark 2. (1) *For any element a of a brace A the centralizers*

$$C_{A^\circ}(a) = \{z \in A^\circ \mid z \circ a = a \circ z\} \text{ and } C_A(a) = \{z \in A \mid za = az\}$$

are equal.

(2) *If*

$$Z(A) = \{z \in A \mid za = az \quad \text{for every} \quad a \in A\}$$

and

$$Z_1(A^\circ) = \{z \in A^\circ \mid z \circ a = a \circ z \quad \text{for every} \quad a \in A^\circ\},$$

then $Z(A) = Z_1(A^\circ)$ is a normal subgroup in A°.

Let S be a two-sided ideal of a brace A. On the set

$$A/S = \{a + S \mid a \in S\}$$

we have two operations "+" and "·" (see [6]) given by the rules:

- $(a_1 + S) + (a_2 + S) = (a_1 + a_2) + S$,
- $(a_1 + S) \cdot (a_2 + S) = (a_1 a_2) + S$ for $a_1, a_2 \in A$. Then $(A/S, +, \cdot)$ is a brace (and A/S is called the quotient brace of A with respect to an ideal S).

Lemma 4. *If S is an ideal of a brace A, then the groups $(A/S)^\circ$ and A°/S° are isomorphic.*

Proof. In fact, the rule

$$\varphi : (A/S)^\circ \ni a + S \mapsto a \circ S^\circ \in A^\circ/S^\circ$$

is a group isomorphism. □

Lemma 5. *If S is a two-sided ideal of a brace A, then the groups $H(A)/H(S)$ and $H(A/S)$ are isomorphic.*

Proof. Assume that $H(A) = E \rtimes F$, $H(S) = U \rtimes W$ and $H(A/S) = Q \rtimes R$. Then, by Lemma 2, we have that $U \leq E$, $W \leq F$ and so

$$\begin{aligned} H(A)/H(S) &= (E \rtimes F)/H(S) \cong (EH(S)/H(S)) \rtimes (FH(S)/H(S)) = \\ &= (EUW/UW) \rtimes (FUW/UW) \cong (EW/UW) \rtimes (FW/UW). \end{aligned}$$

Furthermore, we have the group isomorphisms

$$Q \cong (A/S)^+ \cong A^+/S^+ \cong E/U \cong EW/UW$$

and, by Lemma 4,

$$R \cong (A/S)^\circ \cong A^\circ/S^\circ \cong F/W \cong FU/WU.$$

The lemma is prowed. □

2. Frobenius groups. Recall that a group $H = E \rtimes F$ is called a Frobenius group with a kernel E and a complement F if
$$F \cap F^g = \{1\}$$
for all $g \in H \setminus F$ and
$$E \setminus \{1\} = H \setminus \bigcup_{h \in H} F^h.$$

Proof of Theorem 1. Assume that $H = E \rtimes F$ is a Frobenius group with $E \cong L^+$ and $F \cong T$. By Lemma 1.1 of [3], for any elements $h \in T$ and $l \in L$ there exists $l_1 \in L$ such that $(l, 0) = [(l_1, 0), (e, h)]$ and consequently $(l, 0) = (l_1, 0)^{-1}(e, h)^{-1}(l_1, 0)(e, h) = (l_1 h, 0)$. Then $l = l_1 h$ and we conclude that $L = Lh$ for any $0 \neq h \in T$.

Suppose that $lt = e$ for some $t \in T$ and $0 \neq l \in L$. Then
$$\{(e, 0)\} = F \bigcap F^{(l,0)} \ni (e, t)^{(l,0)} = (-lt, 0), \tag{4}$$
which implies that $t = 0$ and $\operatorname{ann}_T l = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Assume that a group $H = E \rtimes F$ satisfies the conditions (i) and (ii). If $0 \neq v \in T$ and $k \in L$, then $k = k_1 v$ for some $k_1 \in L$ and the commutator $[(k_1, 0), (0, e)] = (k_1 v, 0) = (k, 0)$ for any $(e, 0) \neq (e, t) \in F$. This means that $E = [E, (e, t)]$. Moreover, for any elements $(u, v) \in H$ and $(e, t) \in F$ we see that
$$F^{(u,v)} \ni (e, t)^{(u,v)} = (-(ut)v - ut - ((uv^{(-1)})t)v - (uv^{(-1)})t, v^{(-1)} \circ t \circ v).$$
If $v = 0$ and $u \neq 0$, then $(-ut, t) = (e, t)^{(u,0)} \in F^{(u,0)}$. This gives that
$$H \setminus \bigcup_{(u,v) \in H} F^{(u,v)} = E \setminus \{(e, 0)\}.$$
Now we assume that $(e, h)^{(u,v)} \in F \cap F^{(u,v)}$ for some $h, v \in T$ and $0 \neq u \in L$. Then
$$(e, h)^{(u,v)} = (-u(v^{(-1)} \circ h \circ v), v^{(-1)} \circ h \circ v).$$
and therefore $-u(v^{(-1)} \circ h \circ v) = e$. From this, in view of (ii), we have $v^{(-1)} \circ h \circ v = 0$ and consequently $h = 0$. Hence
$$F \bigcap F^{(u,v)} = \{(e, 0)\}$$
and H is a Frobenius group with a kernel E and a complement F. □

Let R be an associative ring with 1, A be a right R-module. If $\mu : A \to U(R)$ is an additive map and
$$\mu(a\mu(b)) = \mu(a)$$
for all $a, b \in A$, then $(A, +, \cdot)$ is a brace (see Example 1 of [5]) with a multiplication "$\cdot$" given by the rule
$$ab = a(\mu(b) - 1) \tag{5}$$

Example 1. *As in Example 3 of [5], $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A^+ \cong \mathbb{Z}_6$ and $\mu : A \to U(\mathbb{Z}_6)$ is such that*
$$\mu(0) = \mu(2) = \mu(4) = 1,$$
$$\mu(1) = \mu(3) = \mu(5) = 0.$$
Then $(A, +, \cdot)$ is a brace with the multiplication given by (5) (and depicted by Table):

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	4	0	4	0	4
2	0	2	0	2	0	2
3	0	0	0	0	0	0
4	0	4	0	4	0	4
5	0	2	0	2	0	2

If $L = \{0, 2, 4\}$, then $LA = L$ and so L is an A-module. Since $T = \{0, 5\}$ is a subgroup in A°,
$$L \cdot 5 = \{0 \cdot 5, 2 \cdot 5, 4 \cdot 5\} = \{0, 2, 4\} = L$$
and
$$\operatorname{ann}_T 2 = \{0\} = \operatorname{ann}_T 4,$$
we conclude that $H(L, T)$ is a Frobenius group.

3. Nilpotent braces. In this section we investigate the properties of nilpotent braces.

Lemma 6. *If A is a brace and $k > 0$, then $A^{(k+1)}$ is an ideal of $A^{(k)}$.*

Proof. It is easy to seen that $A^{(k+1)}$ is a subgroup of $A^{(k)}$. Since
$$A^{(k+1)}A^{(k)} \subseteq A^{(k+1)}A \subseteq A^{(k+2)} \subseteq A^{(k+1)}$$
and
$$A^{(k)}A^{(k+1)} \subseteq A^{(k)}A \subseteq A^{(k+1)},$$
we obtain the result. □

Remark 3. *Let A be a brace and p a prime. Then*

(1) *$H(A)$ is a torsion group if and only if A^+ and A° are torsion;*

(2) *$H(A)$ is a p-group if and only if A^+ and A° are p-groups.*

As in Lemma 2.4 of [2] we can prove the next

Theorem 3. *Let A be a right nilpotent (respectively left nilpotent) brace, p a prime. Then*

(1) *A^+ is a p-group if and only if A° is a p-group;*

(2) *A^+ is a torsion-free group if and only if A° is a torsion-free group.*

Proof. (*a*) Asuume that A is a right nilpotent brace of index n. We prove by induction on n. Since

$$A^{(n-1)}A^{(n-1)} \subseteq A^{(n-1)}A = \{0\},$$

we conclude that $A^{(n-1)}$ is a commutative radical ring. Now we assume that the result is true for right nilpotent braces of index $< n$. Since

$$(A/A^{(2)})^{(2)} \subseteq (A/A^{(2)}) \cdot (A/A^{(2)}) = A^{(2)}/A^{(2)} = \{\bar{0}\},$$

we have group isomorphisms

$$(A/A^{(2)})^+ \cong (A/A^{(2)})^\circ \cong A^\circ/(A^{(2)})^\circ$$

and the assertion follows.

(*b*) For arbitrary k, A^k is an ideal of A,

$$(A^k/A^{k+1})^+ \cong (A^k/A^{k+1})^\circ$$

and for a left nilpotent brace A the assertion is also true. □

Lemma 7. *Let A be a brace. Then $Z(H(A)) \neq \{(0,0)\}$ if and only if $\operatorname{ann}_l A \neq \{0\}$.*

Proof. ($\Leftarrow$) If $0 \neq a \in \operatorname{ann}_l A$, then, by Lemma 2, $(a,0) \in C_E(F)$ and therefore

$$(0,0) \neq (a,0) \in Z(H(A)).$$

($\Rightarrow$) If $(a,0) \in Z(H(A))$ for some $0 \neq a \in A$, then for any elements $u, v \in A$ we obtain

$$(av + a + u, v) = (a,0)(u,v) = (u,v)(a,0) = (u + a, v).$$

This yields that $av = 0$ and so $a \in \operatorname{ann}_l A$. □

Corollary 2. *Let A be a brace. If $H(A) = E \rtimes F$ and $Z(H(A)) \not\subseteq E$, then*

$$Z(A) \cap \operatorname{ann}_r A \neq \{0\}.$$

Proof. Assume that $(a,b) \in Z(H(A))$ and $b \neq 0$. Then for any $u \in A$ we have

$$(a + u, b) = (a,b)(u,0) = (u,0)(a,b) = (ub + u + a, b)$$

and

$$(au + a, b \circ u) = (a,b)(0,u) = (0,u)(a,b) = (a, u \circ b)$$

and consequently $ub = 0$, $au = 0$ and $b \circ u = u \circ b$. This yields that $b \in Z(A)$. □

4. Proof of Theorem 2. (1) Let A be a non-zero left nilpotent brace of index n. Then $(A^{n-1})A = \{0\}$ and $A^{n-1} \neq \{0\}$. This means that $A^{n-1} \subseteq \operatorname{ann}_l A$ and, by Lemma 7, $Z(H(A)) \neq \{(0,0)\}$. Since A^{n-1} is a two-sided ideal in A and

$$(A/A^{n-1})^{n-1} = \{\bar{0}\},$$

by induction on n we can prove that $H(A)$ is a nilpotent group. Moreover, $Z(A^\circ) \lhd A^\circ$ and so

$$\{0\} \neq (A^{n-1})^\circ \bigcap Z(A^\circ) \subseteq \operatorname{ann} A.$$

(2) We have $A^{(n)} = \{0\}$ for some positive integer n and thus

$$A^{(n-1)} \subseteq \operatorname{ann}_r A.$$

But $\operatorname{ann}_r A$ is a two-sided ideal in A and so $(\operatorname{ann}_r A)^\circ$ is an abelian normal subgroup of A°. By induction on n we obtain the result. □

Example 2. *Let $(\mathbb{F}_2)^3$ be a brace constructed in* [5] *(see Example 2) with the multiplication "$\cdot$" depicted by Table:*

$\cdot$	000	111	100	011	010	101	001	111
000	000	000	000	000	000	000	000	000
111	000	000	000	000	000	000	000	000
100	000	110	000	001	111	110	111	001
011	000	110	000	001	111	110	111	001
010	000	110	111	110	000	001	111	001
101	000	110	111	110	000	001	111	001
001	000	000	111	111	111	111	000	000
111	000	000	111	111	111	111	000	000

This brace has a series

$$A \supset A^{(2)} = \{000, 111, 001, 100\} \supset A^{(3)} = \{000, 111\} \supset A^{(4)} = \{000\}$$

and

$$A \supset A^2 = \{000, 111, 001, 100\} = A^3.$$

This means that A is right nilpotent and A is not left nilpotent. Since

$$111 \cdot 100 = 000 \neq 110 = 100 \cdot 111,$$

we conclude that $111 \notin Z(A)$ and so $A^{(3)} \cap Z(A) = \{000\}$. If $a = 001$, $b = 100$, then

$$A^\circ = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$$

is a dihedral group of order 8. Hence $H(A)$ is a 2-group of order 64 and it is nilpotent. If $H(A) = E \rtimes F$, then, by Corollary 2, we have $Z(H(A)) \subseteq E$.

References

1. Сысак Я.П. *Произведения групп, связанные с радикальными кольцами. В: Произведения бесконечных групп* // Препринт 82.53: Институт математики АН УССР. – 1982. — С. 21–35.
2. Amberg B., Dickenschied O. *On the adjoint group of a radical ring*, Canad. Math. Bull., **38** (1995), 262–270.
3. Artemovych O.D. *On Frobenius groups associated with modules*, Demonstratio Math., **31** (1998), 875–878.
4. Robinson D. J. S. A course in the theory of groups. Springer, 1982.
5. Rump W. *Braces, radical rings, and quantum Yang-Baxter equations*, J. Algebra. **307** (2007). 153–170.
6. Rump W. *Modules over braces*, Algebra and Discrete Math., **2** (2006), 127–137.

Institute of Mathematics, Cracow University of Technology,
Cracow, Poland

Precarpathian National University,
Ivano-Frankivsk, Ukraine

Received 06.03.2011

Артемович О.Д., Скасків Л.В. *Групи асоційовані з брейсами* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 4–14.

У даній статті побудовано групу $H(A)$, асоційоваиу з брейсом A, і досліджено її властивості.

Артемович О.Д., Скаскив Л.В. *Группы ассоциированные с брейсами* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 4–14.

В этой роботе построено группу $H(A)$, ассоциированную с брейсом A, и исследовано её свойства.

Карпатські математичні публікації. Т.3, №1 | Carpathian Mathematical Publications. V.3, №1

УДК 517.965+517.18

Величко Е.В., Ткаченко И.Г.

О КОРРЕКТНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Величко Е.В., Ткаченко И.Г. *О корректности определения тригонометрических функций системой функциональных уравнений* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 15–21.

В работе показано, что система функциональных уравнений $S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x)$, $C(x+y) = C(x)C(y) - S(y)S(x)$ определяет более широкий класс функций, чем тригонометрические. Установлены дополнительные условия, которые необходимо добавить к этой системе, чтобы данная система имела единственное решение $S(x) = \sin ax$, $C(x) = \cos ax$. При доказательстве использовался способ сведения функциональных уравнений к дифференциальным.

Введение и анализ публикаций

Существуют различные подходы к определению функций. Анализ каждого из таких подходов позволяет сформулировать различные обобщения элементарных функций. Кроме того сравнение различных подходов интересно с методической точки зрения. При определении тригонометрических функций в основном используют такие способы:

- "геометрический подход", в котором функции вводятся как отношения сторон в прямоугольном треугольнике;

- "дифференциальный подход", в котором функции вводятся как решения задач Коши;

- "аналитический иодход", при котором функции описываются степенными рядами;

- "функциональный подход", при котором функции определяются как решения функциональных уравнений.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 39B72.
Ключевые слова и фразы: тригонометрические функции, функциональное уравнение, дифференциальное уравнение, ограниченные функции.

В данной статье анализируется корректность определения основных тригонометрических функций через функциональные уравнения. В многочисленных интернет-энциклопедиях, среди которых отметим Википедию и Вапедию, функции $\sin x$ и $\cos x$ определяются как непрерывные решения системы (1), (2). Однако функции $\sin ax$ и $\cos ax$ так же являются решением, поэтому необходимо, как минимум, одно дополнительное условие для определения константы a.

В работе [1] авторы предлагают взять несколько другую систему:

$$\begin{cases} S(x-y) = S(x)C(y) - S(y)C(x), \\ C(x-y) = C(x)C(y) + S(x)S(y) \end{cases}$$

и дополнить ее условиями

$$\begin{cases} S(x) > 0, x \in (0; a), \\ S(a) = 1. \end{cases}$$

Доказательство того, что $S(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$, $C(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$, проводится путем вычисления значений функций на некотором всюду плотном множестве и предельным переходом с использованием непрерывности.

В работе [2] чешского автора Otomar'a Hajek'a анализируются обобщения уравнений типа (1) и (2) при наличии дополнительных свойств, таких как дифференцируемость и аналитичность функций.

Целью данной статьи является решение в классе непрерывных функций системы (1), (2) с условием (3) и формулировка условий, обеспечивающих единственность решения.

1 Постановка задачи

Рассмотрим систему функциональных уравнений

$$S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x), \tag{1}$$

$$C(x+y) = C(x)C(y) - S(y)S(x), \tag{2}$$

которую дополним условием

$$\lim_{x\to 0} \frac{S(x)}{x} = a \neq 0. \tag{3}$$

Будем искать непрерывные решения этой системы.

Выясним, будут ли функции $S(x) = \sin ax$ и $C(x) = \cos ax$ единственными решениями или нет.

2 Определение значений функций в точке 0

Найдем значение $s_0 = S(0)$ и $c_0 = C(0)$. Для этого в (2) и (3) подставим $y = 0$ и получим

$$S(x) = S(x+0) = S(x)c_0 + C(x)s_0,$$

$$C(x) = C(x+0) = C(x)c_0 - S(x)s_0.$$

Перепишем эти тождества в виде

$$\begin{cases} S(x)(1-c_0) - C(x)s_0 = 0, \\ S(x)s_0 + C(x)(1-c_0) = 0, \end{cases}$$

и рассмотрим как систему относительно неизвестных $S(x)$, $C(x)$. Для того, чтобы эта система имела ненулевое решение (а иначе условие (3) не будет иметь места), необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-c_0 & -s_0 \\ s_0 & 1-c_0 \end{vmatrix} = (1-c_0)^2 + s_0^2 = 0.$$

Последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$s_0 = S(0) = 0, \; c_0 = C(0) = 1. \tag{4}$$

3 Исследование функций на четность

Исследуем, как связаны значения функций $S(x)$ и $C(x)$ в точках x и $-x$. Для этого положим в (1) и (2) $y = -x$:

$$0 = S(0) = S(x-x) = S(x)C(-x) + C(x)S(-x).$$

$$1 = C(0) = C(x-x) = C(x)C(-x) - S(x)S(-x).$$

Выразим из этих соотношений функции $S(-x)$ и $C(-x)$, рассматривая их как систему линейных уравнений:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} C(x) & S(x) \\ -S(x) & C(x) \end{vmatrix} = C^2(x) + S^2(x) \geq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & S(x) \\ 1 & C(x) \end{vmatrix} = -S(x), \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} C(x) & 0 \\ -S(x) & 1 \end{vmatrix} = C(x).$$

Таким образом

$$S(-x) = \frac{-S(x)}{\Delta(x)}, \quad C(-x) = \frac{C(x)}{\Delta(x)}. \tag{5}$$

4 Исследование функции $\Delta(x)$

Положим в (1) $y = -y$ и вычислим значение выражения $S(x + (-y))$, используя (5):

$$S(x-y) = S(x)C(-y) + S(-y)C(x) = \frac{S(x)C(y) - S(y)C(x)}{\Delta(y)}. \tag{6}$$

Аналогично вычисляем $S(y-x)$, используя (1), (5) и (6):

$$S(y-x) = S(y)C(-x) + S(-x)C(y) = \frac{S(y)C(x) - S(x)C(y)}{\Delta(x)} = -S(x-y)\frac{\Delta(y)}{\Delta(x)}. \tag{7}$$

Мы так же можем подсчитать $S(y-x)$, использовав тождества (5) и (7):

$$S(x-y) = S(-(y-x)) = -\frac{S(y-x)}{\Delta(y-x)} = \frac{S(x-y)\Delta(y)}{\Delta(y-x)\Delta(x)}. \tag{8}$$

Из соотношения (8) делаем вывод, что

$$\Delta(y-x) = \frac{\Delta(y)}{\Delta(x)}.$$

Общее непрерывное решение функционального уравнения (5), которое называется уравнением Коши [3], имеет вид

$$\Delta(x) = e^{2bx}, \tag{9}$$

где b — параметр, подлежащий определению.

5 Сведение функциональных уравнений к дифференциальным

Подставляя (9) в (5), получим, что $S(-x) = -S(x)e^{-2bx}$, $C(-x) = C(x)e^{-2bx}$. Найдем приращение функции $S(x)$:

$$S(x+y) - S(x-y) = S(x)C(y) + S(y)C(x) - S(x)C(-y) - C(x)S(-y) =$$

$$S(x)C(y) + S(y)C(x) - S(x)C(y)e^{-2by} + C(x)S(y)e^{-2by} =$$

$$S(x)C(y)(1-e^{-2by}) + C(x)S(y)(1+e^{-2by}).$$

Вычислим производную

$$S'(x) = \lim_{y\to 0}\frac{S(x+y)-S(x-y)}{2y} = S(x)\lim_{y\to 0}\frac{C(y)(1-e^{-2by})}{2y} +$$

$$C(x)\lim_{y\to 0}\frac{S(y)(1+e^{-2by})}{2y} = bS(x) + aC(x).$$

Найдем приращение функции $C(x)$ и вычислим производную:

$$C(x+y) - C(x-y) = C(x)C(y) - S(x)S(x) - C(x)C(y)e^{-2by} -$$

$$S(x)S(y)e^{-2by} = C(x)C(y)(1-e^{2by}) - S(x)S(y)(1+e^{2by}),$$

$$C'(x) = \lim_{y\to 0}\frac{C(x+y)-C(x-y)}{2y} = C(x)\lim_{y\to 0}\frac{C(y)(1-e^{-2by})}{2y} -$$

$$S(x)\lim_{y\to 0}\frac{S(y)(1+e^{-2by})}{2y} = bC(x) - aS(x).$$

Получаем, что функции $S(x)$ и $C(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} S'(x) = bS(x) + aC(x), \\ C'(x) = -aS(x) + bC(x). \end{cases} \tag{10}$$

6 Решение системы дифференциальных уравнений

Решим систему (10) с условиями (4) методом сведения к одному уравнению. Продифференцируем первое уравнение системы:

$$S''(x) = bS'(x) + aC'(x) = b(bS(x)+aC(x)) + a(-aS(x)+b(C(x)) = (b^2-a^2)S(x) + 2abC(x) =$$

$$(b^2-a^2)S(x) + 2b(S'(x) - bS(x)) = 2bS'(x) - (b^2+a^2)S(x).$$

Получили тождество $S''(x) - 2bS'(x) + (b^2+a^2)S(x) = 0$, характеристическое уравнение которого имеет вид $\lambda^2 - 2b\lambda + (b^2+a^2) = 0$. Последовательно находим дискриминант $D = 4b^2 - 4b^2 - 4a^2 = (2ai)^2$ и корни $\lambda_{1,2} = b \pm ai$. Таким образом, $S(x) = e^{bx}(A\sin ax + B\cos ax)$. Из граничного условия $S(0) = 0$, полученного выше, найдем, что $B = 0$. С учетом этого $S(x) = Ae^{bx}\sin ax$. Далее, из первого уравнения системы (10) найдем $aC(x) = S'(x) - bS(x) = Aa\cos axe^{bx} + Ab\sin axe^{bx} - Ab\sin axe^{bx}$. Приводя подобные, получим $C(x) = A\cos axe^{bx}$. Подставляя условие $C(0) = 1$, получаем, что $C(0) = A = 1$. На основании вышеизложенного приходим к выводу, что решения системы (1)–(3) нужно искать в виде

$$\begin{cases} S(x) = e^{bx}\sin ax, \\ C(x) = e^{bx}\cos ax. \end{cases} \tag{11}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при любом значении b эти функции будут удовлетворять указанной системе.

7 О дополнении исходной системы функциональных уравнений

Как показано выше, для того, что бы система (1)–(3) однозначно определяла функции $\sin ax$ и $\cos(ax)$ необходимо добавить условие, обеспечивающее равенство $b = 0$ в формулах (11). В качестве такого предлагается взять условие ограниченности функций $S(x)$ и $C(x)$:

$$\exists M : \forall x \max\{|S(x)|, |C(x)|\} < M. \tag{12}$$

Покажем, что система (1)–(3) и условие (12) однозначно определяют функции $S(x) = \sin ax$ и $C(x) = \cos ax$.

Сначала доказывается (точно так же, как это было сделано выше), что имеют место соотношения (4) и (5). Потом предполагаем, что $\exists z : \Delta z \neq 1$. Применяя два раза формулу (5), получим что

$$S(x) = S(-(-x)) = \frac{-S(-x)}{\Delta(-x)} = \frac{S(x)}{\Delta(x)\Delta(-x)}.$$

Откуда делаем вывод, что $\forall x\ \Delta(x)\Delta(-x) = 1$. Поскольку

$$\Delta(z) \geq 0,\ \Delta(-z) \geq 0 \lor \Delta(z) \neq 1 \lor \Delta(z)\Delta(-z) = 1,$$

то значит $\exists t \in \{-z; z\}$, такое что

$$\Delta(t) = T > 1. \tag{13}$$

Подставляя в (1) $y = x$, получаем, что $S(2x) = 2S(x)C(x)$. Тогда, применив формулу (5), получим, что

$$S(-2x) = 2S(-x)C(-x) = \frac{-2S(x)C(x)}{\Delta^2(x)} = \frac{-S(2x)}{\Delta^2(x)}.$$

С другой стороны,

$$S(-2x) = -\frac{S(2x)}{\Delta(2x)}.$$

Сравнивая последние два выражения, делаем вывод, что

$$\Delta(2x) = \Delta^2(x). \tag{14}$$

Используя метод математической индукции и соотношения (13) и (14), легко показать, что $\forall n \in N\ \Delta(2^n t) = T^n$. Поскольку последовательность T^n возрастает и неограниченна, то выберем n_0 так, чтобы $T^{n_0} > 2M^2$. Тогда $\Delta(2^{n_0}t) = S^2(2^{n_0}t) + C^2(2^{n_0}t) > 2M^2$, а, значит $|S(2^{n_0}t)| > M \vee |C(2^{n_0}t)| > M$, что противоречит (12). Мы показали, что $\Delta(x) \equiv 1$, и тогда из (5) следует, что $S(-x) = -S(x)$, $C(-x) = C(x)$. Найдем приращения и производные:

$$S(x+y) - S(x-y) = S(x)C(y) + S(y)C(x) - S(x)C(-y) - C(x)S(-y) = 2C(x)S(y),$$

$$S'(x) = \lim_{y\to 0}\frac{S(x+y) - S(x-y)}{2y} = \lim_{y\to 0}\frac{2C(x)S(y)}{2y} = C(x)\lim_{y\to 0}\frac{S(y)}{y} = aC(x).$$

$$C(x+y) - C(x-y) = C(x)C(y) - S(y)S(x) - C(x)C(-y) + S(x)S(-y) = -2S(x)S(y).$$

$$C'(x) = \lim_{y\to 0}\frac{C(x+y) - C(x-y)}{2y} = \lim_{y\to 0}\frac{-2S(x)S(y)}{2y} = -S(x)\lim_{y\to 0}\frac{S(y)}{y} = -aS(x).$$

Теперь найдем вторую производную

$$S''(x) = (S'(x))' = (aC(x))' = a(-aS(x)) = -a^2S(x).$$

Найдем граничные условия: $S(0) = 0$, $S'(0) = aC(0) = a$.

Таким образом, функция $S(x)$ является решением следующей задачи Коши:

$$y'' + a^2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = a. \tag{15}$$

Аналогично получается, что функция $C(x)$ является решением следующей задачи Коши:

$$y'' + a^2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \tag{16}$$

Из курса дифференциальных уравнений известно, что функции $y(x) = \sin ax$ и $y(x) = \cos ax$ являются единственными решениями задач (15) и (16) соответственно. Непосредственно проверяется, что функции

$$S(x) = \sin ax,\ C(x) = \cos ax$$

удовлетворяют функциональным уравнениям (1), (2) с условиями (3) и (12), и проведенный выше анализ доказывает, что это решение единственно в классе непрерывных функций.

Выводы

В работе показано, что система функциональных уравнений (1), (2) определяет функции $\sin ax$ и $\cos ax$ только при наличии дополнительных условий, в качестве которых можно взять условие (3), описывающее поведение функции $S(x)$ в окрестности нуля, и условие ограниченности функций $S(x)$ и $C(x)$. Решение системы проводилось путем сведения функциональных уравнений к дифференциальным.

Список литературы

1. Андреев А.А., Костиков Д.В., Саушкин И.Н. *Система функциональных уравнений тригонометрических функций* [Електронний ресурс]: http://ermine.narod.ru/MATH/STAT/DANILA/sect2.html
2. Otomar Hajek *Function equations for trigonometric functions*, Czechoslovak Mathematical Journal, **5**, 3 (1955), 432–434.
3. Acz'el J., Dhombres J. Functional Equations in Several Variables. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

Запорожский национальный университет,
Запорожье, Украина

Поступило 15.09.2010

Velichko E.V., Tkachenko I.G. *On the correctness of the determination of trigonometric functions by the system of functional equations*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 15–21.

The article shows that the system of the functional equations $S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x)$, $C(x+y) = C(x)C(y) - S(y)S(x)$ defines a broader class of the functions than the trigonometric equations. The conditions, which must be added to this system to obtain the unique solution have been developed $S(x) = \sin ax$, $C(x) = \cos ax$. The method of the reduction of the functional equations to the differential equations is used.

Величко О.В., Ткаченко І.Г. *Про коректність визначення тригонометричних функцій системою функціональних рівнянь* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 15–21.

У роботі показано, що система функціональних рівнянь $S(x+y) = S(x)C(y)+S(y)C(x)$, $C(x+y) = C(x)C(y) - S(y)S(x)$ визначає більш ширший клас функцій, ніж тригонометричні. Встановлені умови, які необхідно додати до цієї системи, щоб вона мала єдиний розв'язок $S(x) = \sin ax$, $C(x) = \cos ax$. При доведенні використовувався спосіб зведення функціональних рівнянь до диференційних.

Карпатські математичні публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3. №1

УДК 517.51

Герасимчук В.Г., Маслюченко О.В.

КОЛИВАННЯ НАРІЗНО ЛОКАЛЬНО ЛІПШИЦЕВИХ ФУНКЦІЙ

Герасимчук В.Г., Маслюченко О.В. *Коливання нарізно локально ліпшицевих функцій* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 22–33.

Доведено, що функція, яка визначена на добутку двох берівських метричних просторів, є коливанням деякої нарізно локально ліпшицевої функції тоді і тільки тоді, коли вона є невід'ємною напівнеперервною зверху функцією, замикання носія якої є навхрест ніде не щільним.

1 Вступ

Дана робота іде в руслі цілого ряду статей багатьох математиків, таких як Р. Кеннер, Дж. Брекконрідж і Т. Ніпіура, П. Костирко, Й. Еверт, С. Пономарьов, В. Маслюченко, В. Михайлюк, О. Маслюченко, В. Герасимчук та ін.. Ці статті присвячені розв'язанню задачі про опис множини точок розриву функцій з того чи іншого функціонального класу, а також її уточненої версії про опис коливань функцій з певного функціонального класу.

Загальне формулювання цих двох задач виглядає так. Нехай P — деяка властивість функцій на певному топологічному просторі X.

Задача A. *Для яких множин $E \subseteq X$ існує така функція $f : X \to \mathbb{R}$, що має властивість P, для якої множина точок розриву $D(f)$ рівна E.*

Задача B. *Для яких функцій $g : X \to [0, +\infty]$ існує така функція $f : X \to \mathbb{R}$, що має властивість P, для якої коливання ω_f рівне g.*

В роботі [2] було охарактеризовано множину точок розриву нарізно неперервно диференційовних функцій на $\mathbb{R}^2$. Крім того, в [1] було наведено повний опис коливань нарізно неперервно диференційовних функцій на добутку двох скінченно вимірних просторів і нарізно локально ліпшицевих функцій на добутку двох локально компактних метричних просторів. Ці характеризації полягали в тому, що носій функції g є локально проективно ніде не щільним. Проте перенести ці результати на випадок коли простори

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54C30, 54C10.

Ключові слова і фрази: коливання, ω-primitive, локально ліпшицева функція, нарізно локально ліпшицева функція, $C\mathcal{L}$-функція.

не є локально компактними довший час не вдавалось. Виявляється, що причина полягає в тому, що умова локальної проективної ніде не щільності носія, яка добре працює у локально компактному випадку, не підходить у загальному випадку. Замінником цієї властивості є навхрест ніде не щільність замикання носія, яка в цій роботі називається $\overline{hv}$-ніде не щільністю.

Наступні теореми є головними результатами цієї роботи і були анонсовані у [3]. Вони випливають з теорем 3, 4, 5 і наслідку 4.1.

Теорема 1. *Нехай P та Q — деякі локальні однорідні властивості дійснозначних функцій, які сильніші за локальну ліпшицевість, X — P-регулярний берівський метричний простір, а Y — Q-регулярний берівський метричний простір. Для того, щоб функція $g : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ була коливанням деякої PQ-функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб g була невід'ємною напівнеперервною зверху функцією, а її носій $\operatorname{supp} g$ був $\overline{hv}$-ніде не щільним.*

Теорема 2. *Нехай P — деяка локальна однорідна властивість дійснозначних функцій, що сильніша за локальну ліпшицевість, X — берівський метричний простір, а Y — P-регулярний берівський метричний простір. Для того, щоб функція $g : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ була коливанням деякої CP-функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб g була невід'ємною напівнеперервною зверху функцією, а її носій $\operatorname{supp} g$ був $\overline{hv}$-ніде не щільним.*

2 Точкова та локальна ліпшицевість і диференційовність

Для метричних просторів X та Y, відображення $f : X \to Y$, множини $E \subseteq X$ і точки $x \in X$ покладемо

$$\lambda_f(E) = \sup_{\substack{x',x'' \in E \\ x' \neq x''}} \frac{|f(x') - f(x'')|_Y}{|x' - x''|_X} \text{ і } \lambda_f(x) = \inf_{U \text{- окіл } x} \lambda_f(U).$$

Функцію $\lambda_f : X \to [0, +\infty]$ називатимемо *ліпшицевою похідною* відображення f. Відображення f називається *ліпшицевим на E*, якщо $\lambda_f(E) < +\infty$. Казатимемо, що f — локально ліпшицеве на X, якщо для довільного $x \in X$ існує такий окіл U точки x, для якого f є ліпшицевим на U. Ясно, що f буде локально ліпшицевим тоді і тільки тоді, коли $\lambda_f(x) < +\infty$ при $x \in X$.

Введемо тепер поняття точкової ліпшицевості. Для метричних просторів X та Y і відображення $f : X \to Y$ визначимо функцію

$$l_f(x) = \inf_{U \text{- окіл } x} \sup_{\substack{u \in U \\ u \neq x}} \frac{|f(u) - f(x)|_Y}{|u - x|_X} = \limsup_{u \to x} \frac{|f(u) - f(x)|_Y}{|u - x|_X}, \quad x \in X,$$

яку називатимемо *точковою ліпшицевою похідною*. Функція f називається *точково ліпшицевою*, якщо $l_f(x) < \infty$ для кожного $x \in X$.

Як відомо з [5, с.473], якщо відображення між нормованими просторами має неперервну похідну Ґато, то вона буде її похідною Фреше. Модифікуючи доведення цього результату, отримуємо наступний факт.

Твердження 2.1. *Нехай X — відкрита підмножина деякого нормованого простору $\widetilde{X}$, Y — нормований простір, і відображення $f : X \to Y$ має локально обмежену за нормою похідну за Ґато f'. Тоді $\lambda_f(x) = \limsup\limits_{u\to x} \|f'(u)\|$ при $x \in X$, і тому f — локально ліпшицева. Якщо ж f — неперервно диференційовна, то $\lambda_f(x) = \|f'(x)\|$ при $x \in X$.*

Доведення. Візьмемо деяку точку $x \in X$ і позначимо $\alpha = \limsup\limits_{u\to x} \|f'(u)\|$. Зафіксуємо деяке число $\gamma > \alpha$. Тоді існує опуклий окіл U точки x, такий що $\|f'(u)\| \le \gamma$ при $u \in U$. Покажемо, що $\lambda_f(U) \le \gamma$. Візьмемо дві точки $u_1, u_2 \in U$ і деякий функціонал $y^* \in Y^*$ з $\|y^*\| = 1$. Розглянемо числову функцію

$$g(t) = y^* f\big(u_1 + t(u_2 - u_1)\big), \quad t \in [0, 1].$$

Оскільки f — диференційовна за Ґато, то g — також диференційовна і

$$g'(t) = y^* f'\big(u_1 + t(u_2 - u_1)\big)(u_2 - u_1), \quad t \in [0, 1].$$

Тоді

$$|g'(t)| \le \|y^*\| \big\|f'\big(u_1 + t(u_2 - u_1)\big)\big\| \|u_2 - u_1\| \le \gamma \|u_2 - u_1\|$$

для кожного $t \in [0, 1]$, адже $u_1 + t(u_2 - u_1) \in U$. Далі, за формулою Лагранжа матимемо, що

$$\big|y^*\big(f(u_2) - f(u_1)\big)\big| = |g(1) - g(0)| \le \gamma \|u_2 - u_1\|.$$

Таким чином, використовуючи відомий наслідок з теореми Гана-Банаха, одержуємо, що

$$\|f(u_2) - f(u_1)\| = \sup_{\|y^*\|=1} \big|y^*\big(f(u_2) - f(u_1)\big)\big| \le \gamma \|u_2 - u_1\|$$

для довільних $u_1, u_2 \in U$. Отже, $\lambda_f(U) \le \gamma$. Спрямувавши $\gamma \to \alpha$, одержуємо нерівність $\lambda_f(x) \le \alpha$.

Візьмемо тепер $\gamma < \alpha$. Розглянемо деякий відкритий окіл U точки x в X. Тоді $\sup\limits_{u\in U} \|f'(u)\| \ge \alpha > \gamma$. Отже, існує таке $u_0 \in U$, для якого $\|f'(u_0)\| > \gamma$. Візьмемо $\varepsilon > 0$, для якого $B(u_0, \varepsilon) \subseteq U$. З означення норми у спряженому просторі матимемо, що $\|f'(u_0)e\| > \gamma$ для деякого $e \in \widetilde{X}$ з $\|e\| = 1$. Таким чином,

$$\gamma < \|f'(u_0)e\| = \lim_{t\to+0} \frac{1}{t} \|f(u_0 + te) - f(u_0)\|.$$

Тоді існує таке додатне $t < \varepsilon$, для якого $\frac{1}{t}\|f(u_0+te) - f(u_0)\| > \gamma$. Покладемо $u_1 = u_0 + te$. Оскільки $u_0, u_1 \in U$ то

$$\lambda_f(U) \ge \frac{\|f(u_1) - f(u_0)\|}{\|u_1 - u_0\|} = \frac{1}{t}\|f(u_1) - f(u_0)\| > \gamma.$$

Таким чином, $\lambda_f(x) \ge \gamma$. Спрямувавши $\gamma \to \alpha$, будемо мати, що $\lambda_f(x) \ge \alpha$. □

Ще простіше доводиться наступний факт.

Твердження 2.2. *Нехай X — відкрита підмножина деякого нормованого простору $\widetilde{X}$, Y — нормований простір, відображення $f : X \to Y$ — диференційовне за Фреше і f' — її похідна Фреше. Тоді $l_f(x) = \|f'(x)\|$, $x \in X$. Зокрема, f — точково ліпшицева.*

Доведення. Справді, при $x \in X$ матимемо, що з одного боку,

$$l_f(x) = \limsup_{u\to x} \frac{\|f(u) - f(x)\|}{\|u - x\|} = \limsup_{u\to x} \frac{\|f'(x)(u - x) + o(\|u - x\|)\|}{\|u - x\|} \le$$

$$\limsup_{u\to x} \frac{\|f'(x)\|\|(u - x)\| + \|o(\|u - x\|)\|}{\|u - x\|} = \|f'(x)\|,$$

а з іншого боку,

$$l_f(x) = \limsup_{u\to x} \frac{\|f(u) - f(x)\|}{\|u - x\|} = \limsup_{u\to x} \frac{\|f'(x)(u - x) + o(\|u - x\|)\|}{\|u - x\|} \ge$$

$$\limsup_{u\to x} \frac{\|f'(x)\|\|(u - x)\| - \|o(\|u - x\|)\|}{\|u - x\|} = \|f'(x)\|.$$

Отже, $l_f(x) = \|f'(x)\|$. □

3 Локальні властивості функцій і P-регулярні простори

Нехай X, Y, Z — топологічні простори, P — деяка властивість Z-значних функцій на X, а Q — деяка властивість Z-значних функцій на Y. Казатимемо, що функція $f : X \times Y \to Z$ має властивість PQ, якщо для довільних $x \in X$ і $y \in Y$ функція f_y має властивість P, а функція f^x має властивість Q (як звичайно, функції $f_y : X \to Z$ та $f^x : Y \to Z$ визначаються формулою $f_y(x) = f^x(y) = f(x, y)$). Функції, що мають властивість P, ми коротше називатимемо називатимемо *P-функціями*. Сукупність усіх P-функцій $f : X \to Z$ позначатимемо $P(X, Z)$.

Нехай P — деяка властивість Z-значних функцій f, які визначені на відкритих підмножинах X. Ми кажемо, що P — *локальна властивість*, якщо для довільних $G \subseteq X$ і $f : G \to \mathbb{R}$ виконується, що f є P-функцією тоді і тільки тоді, коли для довільної відкритої множини $H \subseteq G$ звуження $f|_H$ є P-функцією.

В цій роботі ми будемо використовувати наступні локальні властивості:

- C — неперервність;
- L — точкова ліпшицевість;
- $\mathcal{L}$ — локальна ліпшицевість;
- D — диференційовність за Ґато;
- $\mathcal{D}$ — диференційовність за Фреше;
- C^1 — неперервна диференційовність.

Властивості, пов'язані з ліпшицевістю, стосуються метричних просторів, а властивості, пов'язані з диференційовністю, стосуються нормованих просторів. Для властивості C^1 ми не вказуємо, яка диференційовність мається на увазі, адже, неперервна диференційовність за Ґато рівносильна неперервній диференційовності за Фреше [5, с. 473].

Нехай X — топологічний простір і P — деяка властивість дійсних функцій на X. Казатимемо, що X є *P-регулярним*, якщо для довільної точки $a\in X$ і її околу U існує P-функція $f : X \to [0,1]$, така що $f(a)=1$ і $f(x)=0$ при $x\in X\setminus U$. Казатимемо, що властивість P є *однорідною*, якщо для довільної P-функції f і числа $\alpha\in\mathbb{R}$ функція αf має властивість P.

Твердження 3.1. *Кожний метричний простір є $\mathcal{L}$-регулярним.*

Доведення. Функція $\varphi:\mathbb{R}\to[0,1]$, яка визначається формулою

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1-|t|, & |t|<1,\\ 0, & |t|\ge 1,\end{cases}$$

є ліпшицевою, причому $\varphi(0)=1$ і $\operatorname{supp}\varphi=(-1,1)$. Тоді для метричного простору X, точки $a\in X$ і числа $\varepsilon>0$ матимемо, що для функції $f : X\to[0,1]$, яка визначена формулою $f(x)=\varphi\big(\frac{1}{\varepsilon}|x-a|_X\big)$, $x\in X$, виконується, що $f(a)=1$ і $\operatorname{supp} f=B(a,\varepsilon)$. Крім того, оскільки $\big||x'-a|_X-|x''-a|_X\big|\le|x'-x''|_X$, то відображення $x\mapsto|x-a|_X$ є ліпшицевим. Тому f — ліпшицева, а значить, і локально ліпшицева. □

Нехай P — деяка властивість дійсних функцій. Казатимемо, що нормований простір X є *P-згладжуваним*, якщо на ньому є така еквівалентна норма, яка має властивість P на $X\setminus\{0\}$.

Твердження 3.2. *Нехай P — це одна із властивостей D, $\mathcal{D}$ чи C^1 і X — відкрита підмножина P-згладжуваного нормованого простору $\widetilde{X}$. Тоді X є P-регулярним.*

Доведення. Добре відомо, що функція φ, яка визначається формулою

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^{1-\frac{1}{1-t^2}}, & |t|<1,\\ 0, & |t|\ge 1,\end{cases}$$

є неперервно (навіть нескінченно) диференційовною, причому $\varphi'(0)=0$. Оскільки диференційовність відносно еквівалентних норм рівносильна, то вважатимемо, що вихідна норма $\|\cdot\|$ має властивість P на $\widetilde{X}\setminus\{0\}$. Покажемо, що і функція $f(x)=\varphi\big(\frac{1}{\varepsilon}\|x-a\|\big)$, $x\in\widetilde{X}$, має властивість P на всьому $\widetilde{X}$. По-перше, оскільки $\varphi(t)-\varphi(0)=o(t)$ при $t\to0$, то $f(x)-f(a)=\varphi\big(\frac{1}{\varepsilon}\|x-a\|\big)-\varphi(0)=o(\|x-a\|)$ при $x\to a$. Таким чином, похідна Фреше функції f в точці a рівна нулю. Нехай p_x — похідна від норми в точці x. Оскільки для довільного $e\in\widetilde{X}$ маємо, що

$$|p_x(x)|=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\big|\|x+te\|-\|x\|\big|\le\|e\|,$$

то $\|p_x\|\le 1$. Але $f'(x)=\frac{1}{\varepsilon}\varphi'\big(\frac{1}{\varepsilon}\|x-a\|\big)p_{x-a}$. Тому $\|f'(x)\|\le\frac{1}{\varepsilon}\varphi'\big(\frac{1}{\varepsilon}\|x-a\|\big)\to0=f'(0)$ при $x\to a$. Таким чином, похідна (Ґато чи Фреше) функції f неперервна в точці a. □

За допомогою тензорного добутку функцій одержується наступний результат.

Твердження 3.3. *Нехай P та Q — деякі однорідні властивості дійснозначних функцій, які сильніші за неперервність, X — P-регулярний метричний простір, а Y — Q-регулярний метричний простір, тоді $X\times Y$ є $PQ\wedge C$-регулярним.*

Доведення. Нехай (a,b) — деяка точка з $X\times Y$ і W — деякий її окіл. Візьмемо такі околи U точки a і V точки b, що $U\times V\subseteq W$. Тоді існують P-функція $f : X\to[0,1]$ і Q-функція $g : Y\to[0,1]$, такі що $f(a)=g(b)=1$ і $f(x)=g(y)=0$ при $x\in X\setminus U$ і $y\in Y\setminus V$. Визначемо функцію $h : X\times Y\to\mathbb{R}$ формулою $h(x,y)=f(x)g(y)$. Оскільки $h^x=f(x)g$ і $h_y=g(y)f$, то з однорідності властивостей P та Q випливає, що h є PQ-функцією. Крім того, h очевидним чином є неперервною, $h(a,b)=f(a)g(b)=1$ і $h(x,y)=f(x)g(y)=0$ при $(x,y)\notin U\times V$. □

4 Необхідні умови на множину точок розриву $C\mathcal{L}$- і $\mathcal{L}\mathcal{L}$-функцій

Нехай X та Y — топологічні простори і $E, M\subseteq X\times Y$. Ми кажемо, що M є *h-околом* /*v-околом*/ множини E, якщо для довільної точки $(x,y)\in E$ існує такий окіл U точки x /V точки y/, що $U\times\{y\}\subseteq M$ /відповідно, $\{x\}\times V\subseteq M$/. Якщо M є h-околом /v-околом/ замикання $\overline{E}$, то казатимемо, що M є $\overline{h}$-околом множини E. І нарешті, множина M називається *hv-околом* , *$\overline{h}v$-околом*, *$h\overline{v}$-околом*, *$\overline{hv}$-околом* множини E, якщо вона є відповідно h- чи $\overline{h}$-околом E і v- чи $\overline{v}$-околом E. Множина E називається h- /v-, hv-, $\overline{h}v$-, $h\overline{v}$-, $\overline{hv}$-/ *ніде не щільною*, якщо існує така ніде не щільна множина M, яка є h- /v-, hv-, $\overline{h}v$-, $h\overline{v}$-, $\overline{hv}$-/ околом множини E. hv-окіл інакше називається *хрестом-околом*, а hv-ніде не щільна множина — *навхрест ніде не щільною*.

Лема 4.1. *Нехай X — топологічний простір, Y, Z — метричні простори, $\gamma>0$, A щільна в X і $f : X\times Y\to Z$ — неперервна відносно першої змінної функція, для якої $\lambda_{f^x}(Y)\le\gamma$ при $x\in A$. Тоді f — неперервна.*

Доведення. По-перше, оскільки f — неперервна відносно першої змінної, то для довільних $x\in X$ і $y',y''\in Y$ матимемо, що

$$|f(x,y')-f(x,y'')|_Z=\lim_{A\ni u\to x}|f^u(y')-f^u(y'')|_Z\le\lim_{A\ni u\to x}\lambda_{f^u}(Y)|y'-y''|_Y\le\gamma|y'-y''|_Y.$$

Перевіримо тепер, що f — неперервна. Візьмемо $x_0\in X$, $y_0\in Y$ і $\varepsilon>0$. Оскільки f — неперервна відносно першої змінної, то існує такий окіл U точки x_0, для якого $|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|_Z<\frac{\varepsilon}{2}$ при $x\in U$. Нехай $V=B\big(y_0,\frac{\varepsilon}{2\gamma}\big)$. Тоді при $x\in U$ і $y\in V$ матимемо, що

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|_Z\le|f(x,y)-f(x,y_0)|_Z+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|_Z\le$$

$$\gamma|y-y_0|_Y+\tfrac{\varepsilon}{2}<\tfrac{\gamma\varepsilon}{2\gamma}+\tfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Таким чином, f — неперервна в точці (x_0,y_0). □

Лема 4.2. *Нехай X — топологічний простір, Y, Z — метричні простори, V — відкрита в Y, $\gamma > 0$ і функція $f : X \times Y \to Z$ — неперервна відносно першої змінної. Тоді множина*

$$A_\gamma(V) = \left\{x \in \mathrm{pr}_X\left(\overline{D(f)} \cap (X \times V)\right) : \lambda_{f^x}(V) \leq \gamma\right\}$$

є ніде не щільною в X.

Доведення. Нехай $U = \mathrm{int}\overline{A_\gamma(V)}$ і $A = U \cap A_\gamma(V)$. Припустимо, що $U \neq \varnothing$. Тоді, оскільки $\overline{A} \supseteq U$, то за лемою 4.1 функція f буде неперервна на $U \times V$. Але це неможливо, адже $(U \times V) \cap D(f) \neq \varnothing$. Таким чином, $U = \varnothing$, а значить, $A_\gamma(V)$ — ніде не щільна. □

Лема 4.3. *Нехай X — берівський топологічний простір, Y, Z — метричні простори і $f : X \times Y \to Z$ — $C\mathcal{L}$-функція. Тоді множина $D(f)$ є hv-ніде не щільною.*

Доведення. Перевіримо спочатку ніде не щільність множини $D(f)$. Нехай $D(f)$ не є ніде не щільною. Тоді існують такі відкриті непорожні множини $U_0 \subseteq X$ і $V_0 \subseteq Y$, що $U_0 \times V_0 \subseteq \overline{D(f)}$. Візьмемо деяке $y_0 \in V_0$ і покладемо $V_n = V_0 \cap B(y_0, \frac{1}{n})$. За лемою 4.2 множини $A_{m,n} = A_m(V_n)$ — ніде не щільні. Зафіксуємо деяке $x \in U_0$. Оскільки $\lambda_{f^x}(y_0) < +\infty$, то існує номер $m > \lambda_{f^x}(y_0)$. Далі, знайдеться $n \in \mathbb{N}$, для якого $\lambda_{f^x}(V_n) < m$. Але $(x, y_0) \in U_0 \times V_0 \subseteq \overline{D(f)}$. Тому $x \in A_{m,n}$. Таким чином, $U_0 \subseteq \bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty} A_{m,n}$, що суперечить беровості X.

Тепер, оскільки f є нарізно неперервною, то з [6, Theorem 6.4, Proposition 6.2] випливає, що $D(f)$ є σ-навхрест ніде не щільною (тобто подається у вигляді зліченного об'єднання навхрест ніде не щільних множин). Крім того, там показано, що довільна ніде не щільна і σ-навхрест ніде не щільна множина в добутку метризовних просторів є навхрест ніде не щільною [6, Proposition 6.3]. Таким чином, множина $D(f)$ є навхрест ніде не щільною. □

Теорема 3. *Нехай X — берівський топологічний простір, Y, Z — метричні простори і $f : X \times Y \to Z$ — $C\mathcal{L}$-функція. Тоді множина $D(f)$ є $h\overline{v}$-ніде не щільною.*

Доведення. За лемою 4.3 множина $D(f)$ є hv-ніде не щільною. Тому залишається перевірити $\overline{v}$-ніде не щільність множини $D(f)$.

За теоремою Стоуна [4, с.414] існує локально скінченне покриття $\mathcal{V}_n$ простору Y, що вписане в покриття Y кулями радіуса $\frac{1}{2n}$. Тоді для кожного $V \in \mathcal{V}_n$ матимемо, що $\mathrm{diam}V \leq \frac{1}{n}$. Покладемо $M_n = \bigcup\limits_{V \in \mathcal{V}_n} \left(A_n(V) \times V\right)$ і $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$. За лемою 4.2 множини $A_n(V)$ — ніде не щільні. Тому за рахунок локальної скінченності $\mathcal{V}_n$ матимемо, що M_n — ніде не щільні.

Покажемо, що M — ніде не щільна. Нехай G_0 — деяка відкрита непорожня підмножина $X \times Y$. Але за лемою 4.3 множина $D(f)$ — ніде не щільна. Тому існують відкриті непорожні множини $U_0 \subseteq X$ і $V_0 \subseteq Y$, такі, що $U_0 \times V_0 \subseteq G_0 \setminus \overline{D(f)}$. Візьмемо деяке $y_0 \in V_0$ і знайдемо такий номер m, для якого $B(y_0, \frac{2}{m}) \subseteq V_0$. Нехай $V_1 = B(x, \frac{1}{m})$ і $G_1 = U_0 \times V_1$.

Покажемо, що $G_1 \cap M_n = \varnothing$ при $n > m$. Справді, нехай $G_1 \cap M_n \neq \varnothing$. Візьмемо $(x_1, y_1) \in G_1 \cap M_n$. Тоді існує $V \in \mathcal{V}_n$, таке що $(x_1, y_1) \in A_n(V) \times V$. Значить, $x_1 \in A_n(V) \subseteq \mathrm{pr}_X\left(\overline{D(f)} \cap (X \times V)\right)$. Отже, існує $y_2 \in V$, для якого $(x_1, y_2) \in \overline{D(f)}$. Тоді $y_2 \notin B(y_0, \frac{2}{m})$, адже $\left(U_0 \times B(y_0, \frac{2}{m})\right) \cap \overline{D(f)} = \varnothing$. Тому $|y_2 - y_0|_Y \geq \frac{2}{m}$. Врахувавши, що $|y_0 - y_1|_Y \leq \frac{1}{m}$, матимемо, що $\frac{1}{m} \leq |y_2 - y_1|_Y \leq \mathrm{diam}V \leq \frac{1}{n}$. Таким чином, $n \leq m$.

Тепер, користуючись ніде не щільністю множин M_n матимемо, що відкрита множина $G_2 = G_1 \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{m} \overline{M}_n$ — непорожня, причому $G_2 \cap M_n = \varnothing$ для кожного n. Тому $G_2 \subseteq G_0 \setminus M$. Отже, M — ніде не щільна.

Доведемо, що M є v-околом множини $\overline{D(f)}$. Візьмемо $(x_0, y_0) \in \overline{D(f)}$. Оскільки $\lambda_{f^{x_0}}(y_0) < +\infty$, то існує номер $n_0 > \lambda_{f^{x_0}}(y_0)$. Далі візьмемо $n_1 > n_0$, для якого $\lambda_{f^{x_0}}\left(B(y_0, \frac{1}{n_1})\right) < n_0$. Покладемо $n = \max\{n_0, n_1\}$. Оскільки $\mathcal{V}_n$ покривають Y, то існує $V \in \mathcal{V}_n$, для якого $y_0 \in V$. Але $\mathrm{diam}V < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_1}$. Тому $V \subseteq B(y_0, \frac{1}{n_1})$. Отже, $\lambda_{f^{x_0}}(V) < n$. Таким чином, $\{x_0\} \times V \subseteq M_n \subseteq M$. □

Наслідок 4.1. *Нехай X, Y, Z — метричні простори, причому X та Y — берівські, і $f : X \times Y \to Z$ — $\mathcal{L}\mathcal{L}$-функція. Тоді множина $D(f)$ є $\overline{hv}$-ніде не щільною.*

5 Побудова функцій з даним коливанням

Для функції $f : X \to \overline{R}$ *верхня та нижня граничні функції* $f^\vee, f^\wedge : X \to \overline{R}$ визначаються формулами

$$f^\vee(x) = \limsup_{u \to x} f(u), \quad f^\wedge(x) = \liminf_{u \to x} f(u), \quad x \in X.$$

Як відомо, коливання функції $f : X \to \mathbb{R}$ обчислюється за формулою $\omega_f = f^\vee - f^\wedge$.

Підмножину S метричного простору X називатимемо *ε-відокремною*, якщо нерівність $|s - t|_X \geq \varepsilon$ виконується для довільних різних точок $s, t \in S$. Казатимемо, що S *відокремна*, якщо вона є ε-відокремною для деякого $\varepsilon > 0$. Множину S називатимемо *σ-дискретною*, якщо існує послідовність дискретних множин S_n, така що $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$.

Лема 5.1. *Нехай X — метричний простір і $E \subseteq X$. Тоді існує σ-дискретна множина $S \subseteq E$, така що $\overline{S} \supseteq E$.*

Доведення. Ясно, що ε-відокремність — це властивість скінченного характеру. Тому за лемою Тейхмюллера-Тьюкі [4, с. 12] для кожного номера n існує максимальна $\frac{1}{n}$-відокремна підмножина S_n множини E. За рахунок максимальності матимемо, що для довільного номера n і точки $x \in E$ існує $s \in S_n$, таке що $|x - s|_X < \frac{1}{n}$. Таким чином, σ-дискретна множина $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$ буде щільною в E. □

В попередній лемі σ-дискретна множина подається у вигляді зліченного об'єднання відокремних множин. Проте виявляється, що таку властивість мають всі σ-дискретні множини.

Лема 5.2. *Нехай X — метричний простір і S — σ-дискретна підмножина X. Тоді існує диз'юнктна послідовність відокремних множин T_n, така що $S = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$.*

Доведення. Застосовуючи міркування леми 5.1 до деякої дискретної множини E, побудуємо послідовність відокремних множин, об'єднання яких щільне в E, а значить, і рівне E. Таким чином, і для σ-дискретної множини S існує послідовність деяких відокремних підмножин S_n, така що $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$. Покладаючи $T_n = S_n \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} S_k$, матимемо, що T_n — відокремні і $S = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$. □

Лема 5.3. *Нехай X — метричний простір і $g : X \to [0, +\infty]$ — деяка напівнеперервна зверху функція. Тоді існує функція $h : X \to [0, +\infty]$ з σ-дискретним носієм, така що $h^\vee = g$.*

Доведення. Нехай $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$. Для кожного $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ покладемо $F_\varepsilon = f^{-1}([\varepsilon, +\infty])$. Оскільки функція f — напівнеперервна зверху, то множини F_ε — замкнені. За лемою 5.1 для кожного $\varepsilon > 0$ виберемо σ-дискретну множину S_ε, таку що $\overline{S}_\varepsilon = F_\varepsilon$. Покладемо $S = \bigcup\limits_{\varepsilon \in \mathbb{Q}^+} S_\varepsilon$ і $h = g\chi_S$, де χ_S — характеристична функція множини S. Покажемо, що h — шукана. По-перше, носій функції h рівний S і тому він є σ-дискретним. Далі, оскільки $h \le g$ і g — напівнеперервна зверху, то $h^\vee \le g^\vee = g$.

Залишилось довести, що $h^\vee \ge g$. Нехай це не так і для деякого $x_0 \in X$ виконується, що $h^\vee(x_0) < g(x_0)$. Візьмемо $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, таке що $h^\vee(x_0) < \varepsilon < g(x_0)$. Тоді $x_0 \in F_\varepsilon$. З іншого боку, існує окіл U точки x_0, такий що $h(x) < \varepsilon$ при $x \in U$. Але $x_0 \in F_\varepsilon = \overline{S}_\varepsilon$. Тому існує $s \in S_\varepsilon \cap U$. Тоді $h(s) = g(s) \ge \varepsilon$, що неможливо. □

Лема 5.4. *Нехай X — метричний простір, G — відкрита підмножина X і S — σ-дискретна підмножина X, така що $S \subseteq \overline{G} \setminus G$. Тоді існує сім'я $\left(U_n^s\right)_{s \in S, n \in \mathbb{N}}$ відкритих непорожніх підмножин G, для якої виконуються наступні властивості*

(*i*) *$\overline{U_n^s} \subseteq G$ при $s \in S$ та $n \in \mathbb{N}$;*

(*ii*) *для довільного $s \in S$ виконується, що $U_n^s \to s$ при $n \to \infty$;*

(*iii*) *для довільної множини $T \subseteq S$ сім'я $\left(U_n^t\right)_{t \in T, n \in \mathbb{N}}$ — дискретна на $X \setminus \overline{T}$.*

Доведення. За лемою 5.2 існують відокремні множини T_k, такі що $S = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} T_k$. Нехай множини T_k є $3\varepsilon_k$-відокремні, причому не буде обмеженням вважати, що $\varepsilon_k < 1$ і $\varepsilon_k \downarrow 0$. Покладемо $S_k = \bigcup\limits_{j=1}^{k} T_j$. Зараз ми індукцією по k визначимо сім'ї $\left(U_n^t\right)_{t \in T_k, n \in \mathbb{N}}$ відкритих непорожніх множин так, щоб виконувались наступні властивості:

$$\overline{U_n^t} \subseteq G \cap B(t, \tfrac{\varepsilon_k}{n}) \text{ при } t \in T_k \text{ і } n \in \mathbb{N}; \tag{1}$$

$$\text{сім'я } \left(\overline{U_n^s}\right)_{s \in S_k, n \in \mathbb{N}} \text{ — диз'юнктна.} \tag{2}$$

Припустимо, що для деякого $k \in \mathbb{N}$ при $j < k$ уже визначені сім'ї $\left(U_n^t\right)_{t \in T_j, n \in \mathbb{N}}$ так, що виконуються властивості аналогічні до (1) та (2). Візьмемо $t \in T_k$ і побудуємо множини U_n^t. Оскільки відокремні множини є замкненими, то множина S_{k-1} також є замкненою. Тоді існує $\varepsilon > 0$, для якого $B(t, 2\varepsilon) \cap S_{k-1} = \varnothing$. Значить, за рахунок (1), $B(t, \varepsilon) \cap U_n^s = \varnothing$

при $s \in S_{k-1}$ і $\frac{1}{n} < \varepsilon$, адже $\varepsilon_j < 1$. Врахувавши, що сім'ї $\left(B(t, \varepsilon_j)\right)_{s \in T_j}$ — дискретні при $j < k$ і використавши (1) матимемо, що сім'я $\left(U_n^s\right)_{t \in S_{k-1}, n \le \frac{1}{\varepsilon}}$ — локально скінченна. Тому

$$B(t, \varepsilon) \cap \overline{\bigcup_{s \in S_{k-1}} \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^s} \subseteq \overline{\bigcup_{s \in S_{k-1}} \bigcup_{n \le \frac{1}{\varepsilon}} U_n^s} = \bigcup_{s \in S_{k-1}} \bigcup_{n \le \frac{1}{\varepsilon}} \overline{U_n^s} \subseteq G \not\ni t$$

Отже, множина $U = X \setminus \overline{\bigcup\limits_{s \in S_{k-1}} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n^s}$ є околом точки t. Тому для множини $H = G \cap U$ матимемо, що $t \in \overline{H}$. Залишилось, індукцією по n побудувати послідовність відкритих непорожніх множин U_n^t так, щоб $\overline{U_n^t} \subseteq H \cap B(t, \frac{\varepsilon_k}{n})$ і послідовність $\left(\overline{U_n^t}\right)_{n=1}^{\infty}$ була би диз'юнктною.

Доведемо, що побудована сім'я $\left(U_n^s\right)_{s \in S, n \in \mathbb{N}}$ є шуканою. По-перше, з властивостей (1_k) випливають властивості (*i*) та (*ii*). Перевіримо (*iii*). Візьмемо $T \subseteq S$ і точку $x \in X \setminus \overline{T}$. Зуважимо, що з властивостей (2_k) випливає, що сім'я $\left(\overline{U_n^t}\right)_{t \in T, n \in \mathbb{N}}$ — диз'юнктна. Тому достатньо перевірити локальну скінченність сім'ї $\left(U_n^t\right)_{t \in T, n \in \mathbb{N}}$ в точці x. Для цього візьмемо таке $\varepsilon > 0$, що $B(x, 2\varepsilon) \cap T = \varnothing$. Тоді за рахунок (1) матимемо, що при $n > \frac{1}{\varepsilon}$ виконується, що $\frac{\varepsilon_k}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$, а тому $U_n^t \cap B(x, \varepsilon) = \varnothing$ при $t \in T$. Далі, оскільки $\varepsilon_k \downarrow 0$, то існує k, для якого $\varepsilon_k < \varepsilon$. Тоді $B(x, \varepsilon) \cap U_n^t = \varnothing$ при $j \ge k$ і $t \in T \cap T_j$. Але сім'ї $\left(B(t, \varepsilon_j)\right)_{t \in T_j}$ — дискретні. Тому для довільних n та j сім'я $\left(U_n^t\right)_{t \in T_j}$ також є дискретною. Таким чином, сім'я $\left(U_n^t\right)_{t \in T, n \in \mathbb{N}}$ — локально скінченна в точці x. □

Лема 5.5. *Нехай P — деяка однорідна локальна властивість дійснозначних функцій, яка сильніша за неперервність, X — P-регулярний метричний простір, G — відкрита підмножина X і $g : X \to [0, +\infty]$ — така напівнеперервна зверху функція, що $E = \operatorname{supp} g \subseteq \overline{G} \setminus G$. Тоді існує функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $\omega_f = g$, $\operatorname{supp} f \subseteq G$ і звуження $f|_{X \setminus \overline{E}}$ є P-функцією.*

Доведення. Перш за все виберемо h за лемою 5.3 і покладемо $S = \operatorname{supp} h$. Тоді $S \subseteq \overline{E} \subseteq G \setminus \overline{G}$. Далі побудуємо сім'ю $\left(U_n^s\right)_{s \in S, n \in \mathbb{N}}$ за лемою 5.4. Для довільних $s \in S$ і $n \in \mathbb{N}$ виберемо деяку точку $a_n^s \in U_n^s$. Оскільки X є P-регулярним, то існує P-функція $\varphi_n^s : X \to \mathbb{R}$, така що $\varphi_n^s(a_n^s)) = 1$ і $\operatorname{supp} \varphi_n^s \subseteq U_n^s$. Далі, нехай $\lambda_n^s = \min\{n, h(s)\}$. Покладемо $f(x) = \sum\limits_{s \in S, n \in \mathbb{N}} \lambda_n^s \varphi_n^s(x)$, $x \in X$. Доведемо, що функція f шукана.

По-перше, $\operatorname{supp} f = \bigcup\limits_{s \in S, n \in \mathbb{N}} \operatorname{supp} \varphi_n^s \subseteq \bigcup\limits_{s \in S, n \in \mathbb{N}} U_n^s \subseteq G$. Далі, оскільки сім'я $\left(U_n^s\right)_{s \in S, n \in \mathbb{N}}$ — дискретна поза $\overline{S} \subseteq \overline{E}$, і властивість P є локальною та однорідною, то $f|_{X \setminus \overline{E}}$ є P-функцією. Залишилось довести, що $\omega_f = g$. Але $h^\vee = g$. Тому досить показати, що $h \le \omega_f \le g$. Оскільки P сильніша за неперервність, то f — неперервна на $X \setminus \overline{E}$. Тому $\omega_f(x) = 0 = g(x) = h(x)$ при $x \in X \setminus \overline{E}$. Зафіксуємо $x \in \overline{E}$. Тоді $f(x) = f^\wedge(x) = 0$. Отже, $\omega_f(x) = f^\vee(x)$. Тому досить довести, що $h(x) \le f^\vee(x) \le g(x)$.

Перевіримо спочатку нерівність $h(x) \le f^\vee(x)$. Якщо $x \notin S$, то $h(x) = 0 \le f^\vee(x)$. Нехай тепер $x \in S$. Тоді, оскільки $a_n^x \to x$, то

$$f^\vee(x) = \limsup_{u \to x} f(u) \ge \limsup_{n \to \infty} f(a_n^x) = \lim_{n \to \infty} \lambda_n^x = \lim_{n \to \infty} \min\{n, h(x)\} = h(x).$$

Доведемо тепер нерівність $f^\vee(x) \le g(x)$. Візьмемо $\varepsilon > 0$. Оскільки g — напівнеперервна зверху, то існує такий окіл U точки x, для якого $g(u) \le g(x) + \varepsilon$ при $u \in U$. Нехай $T = S \setminus U$. Тоді сім'я $(U_n^t)_{t\in T, n\in\mathbb{N}}$ — дискретна в точці x. Але $\overline{U_n^t} \subseteq G \not\ni x$ при $t \in T$ і $n \in \mathbb{N}$. Тому існує окіл V точки x, такий що $V \subseteq U$ і $V \cap U_n^t = \varnothing$ при $t \in T$ і $n \in \mathbb{N}$. Тоді при $v \in V$ матимемо, що

$$f(v) \le \sup_{s\in S\cap U, n\in\mathbb{N}} \lambda_n^s \le \sup_{s\in S\cap U} h(s) \le \sup h(U) \le \sup g(U) \le g(x) + \varepsilon.$$

Тоді $f^\vee(x) \le \sup f(V) \le g(x) + \varepsilon$. Спрямовуючи $\varepsilon \to 0$, одержимо потрібну нерівність. □

Теорема 4. *Нехай P та Q — деякі локальні однорідні властивості дійснозначних функцій, які сильніші за неперервність, X — P-регулярний метричний простір, а Y — Q-регулярний метричний простір і $g : X \times Y \to [0, +\infty]$ — така напівнеперервна зверху функція, що її носій* $\mathrm{supp} g$ *є $\overline{hv}$-ніде не щільна. Тоді існує PQ-функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, така що $\omega_f = g$.*

Доведення. Нехай M — деякий ніде не щільний $\overline{hv}$-окіл множини $E = \mathrm{supp} g$ і $G = (X \times Y) \setminus \overline{M}$. Покладемо $P_0 = PQ \wedge C$. За лемою 3.3 добуток $X \times Y$ є P_0-регулярним. Застосовуючи лему 5.5 до властивості P_0, функції g і множини G, побудуємо функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, таку що $\omega_f = g$, $\mathrm{supp} f \subseteq G$ і $f|_{(X\times Y)\setminus\overline{E}}$ — P_0-функція. Доведемо, що f є PQ-функцією.

Візьмемо $(x, y) \in X \times Y$ і покажемо, що f_y є P-функцією. Якщо $(x, y) \notin \overline{E}$, то звуження f на окіл $(X \times Y) \setminus \overline{E}$ точки (x, y) є P_0-функцією. Тому звуження f_y на деякий відкритий окіл точки x є P-функцією. Нехай тепер $(x, y) \in \overline{E}$. Оскільки M є $\overline{hv}$-околом $\overline{E}$, то існує відкритий окіл U точки x, для якого $U \times \{y\} \subseteq M$. Але f рівна нулю на M. Тому f_y рівне нулю на U. Але нульова функція має властивість P, адже P — однорідна властивість. Таким чином, для кожного $x \in X$ звуження f_y на деякий відкритий окіл точки x має властивість P. Отже, f_y є P-функцією, адже P — локальна властивість. Аналогічно доводимо, що f^x має властивість Q. □

Теорема 5. *Нехай P — деяка локальна однорідна властивість дійснозначних функцій, яка сильніша за неперервність, X — метричний простір, а Y — P-регулярний метричний простір і $g : X \times Y \to [0, +\infty]$ — така напівнеперервна зверху функція,, що її носій* $\mathrm{supp} g$ *є $\overline{hv}$-ніде не щільним. Тоді існує CP-функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, така що $\omega_f = g$.*

Доведення. Нехай M — деякий ніде не щільний $\overline{hv}$-окіл множини $E = \mathrm{supp} g$ і $G = (X \times Y) \setminus \overline{M}$. Покладемо $P_0 = CP \wedge C$. За лемою 3.3 добуток $X \times Y$ є P_0-регулярним. Застосовуючи лему 5.5 до властивості P_0, функції g і множини G, побудуємо функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, таку що $\omega_f = g$, $\mathrm{supp} f \subseteq G$ і $f|_{(X\times Y)\setminus\overline{E}}$ — P_0-функція. Доведемо, що f є CP-функцією.

Візьмемо $(x, y) \in X \times Y$ і покажемо, що f^x є P-функцією. Якщо $(x, y) \notin \overline{E}$, то звуження f на окіл $(X \times Y) \setminus \overline{E}$ точки (x, y) є P_0-функцією. Тому звуження f^x на деякий відкритий окіл точки y є P-функцією. Нехай тепер $(x, y) \in \overline{E}$. Оскільки M є $\overline{hv}$-околом $\overline{E}$, то існує відкритий окіл V точки y, для якого $\{x\} \times V \subseteq M$. Але f рівна нулю на M. Тому f^x рівне нулю на V. Але нульова функція має властивість P, адже P — однорідна властивість. Таким чином, для кожного $x \in X$ звуження f^x на деякий відкритий окіл точки y має властивість P. Отже, f_y є P-функцією, адже P — локальна властивість.

Доведемо, що f_y — неперервне в точці x. Якщо $(x, y) \notin E$, то $\omega_f(x,y)=g(x,y)=0$. Отже, f — неперервна в точці (x, y). А тому f_y — неперервне в точці x. Нехай тепер $(x, y) \in E$. Оскільки M є $\overline{hv}$-околом множини E, то існує такий окіл U точки x, для якого $U \times \{y\} \subseteq M$. Тоді функція f_y рівна нулю на U, а значить, вона неперервна в точці x. □

Література

1. Герасимчук В.Г. Розриви і коливання нарізно диференційовних функцій: Дис. ... кандидата фіз.-мат. наук: 01.01.01. /Василь Григорович Герасимчук. – Чернівці. 2008. – 122с.

2. Герасимчук В.Г., Маслюченко В.К. Михайлюк В.В. *Різновиди ліпшицевості і множини точок розриву нарізно диференційовних функцій* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. – Чернівці: Рута. – №134. – 2002. – С.22–29.

3. Герасимчук В.Г., Маслюченко О.В. *Характеризація коливань нарізно локально ліпшицевих функцій* // Міжнар. конф. "Сучасні проблеми аналізу" присв. 70-річчю кафедри математичного аналізу Чернівецького університету (30 вересня – 3 жовтня). – Чернівці, 2010. – С.56–57.

4. Энгелькинг Р. Общая топология. – Москва: Мир, 1986. – 752с.

5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элеметны теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1968. – 496 с.

6. Maslyuchenko O.V. *The oscillation of quasi-continuous functions on pairwise attainable spaces*, Houston Journal of Mathematics, **35**. 1 (2009), 113–130.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна

Надійшло 05.02.2011

Herasymchuk V.H., Maslyuchenko O.V. *The oscillation of separately locally Lipschitz functions*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 22–33.

We prove that a function which defined on the product of two metric Baire spaces is the oscillation of some separately locally Lipschitz function if and only if it is an upper semicontinuous non-negative function which has a crosswise nowhere dense closure of its support.

Герасимчук В.Г., Маслюченко О.В. *Колебания раздельно локально липшицевых функций* // Карпатские математические публикации. – 2011. – Т.3, №1. – С. 22–33.

Доказано, что функция, которая определена на произведении двух бэровских метрических пространств, является колебанием некоторой раздельно локально липшицевой функции тогда и только тогда, когда она неотрицательна полунепрерывна сверху и замыкание ее носителя накрест нигде не плотно.

Карпатські математичні публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №1

УДК 517.98

Голубчак О.М.

ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА ℓ_1

Голубчак О.М. *Гільбертові простори симетричних аналітичних функцій на* ℓ_1 // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 34–39.

В роботі розглянуто поповнення простору симетричних поліномів на ℓ_1 відносно деякої гільбертової норми і досліджено умови, при яких отриманий простір буде простором аналітичних функцій на ℓ_1. Розглянуто зв'язок з абстрактними просторами Фока.

Вступ

Нехай X — лінійний нормований простір з безумовним базисом над полем $\mathbb{K}$. Функція $f : X \to K$ називається симетричною, якщо $f\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k\Big) = f\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_{\sigma(k)}\Big)$ для довільної підстановки σ на деякій скінченній підмножині натуральних чисел $\mathbb{N}$.

Функція $P : X \to K$ називається поліномом степеня n, якщо $P = P_0 + P_1 + ... + P_n$, де $P_k(x) = B_k(x, x, ..., x)$ і B_k є k-лінійною формою $B_k : X \times X \times ... \times X \to K$ для кожного $1 \leq k \leq n$. При цьому $P_0 = \text{const}$ і $P_n \neq 0$.

Розглянемо простір ℓ_1 абсолютно сумовних послідовностей над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$: $\ell_1 = \{(x_1, x_2, ..., x_n, ...)| \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\}$.

Простір симетричних поліномів на ℓ_1 позначимо $P_s(\ell_1)$. Відомо, що поліноми

$$P_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$$

утворюють алгебраїчний базис в $P_s(\ell_1)$. Також відомо, що поліноми вигляду $P_\lambda = P_{\lambda_1} \cdot P_{\lambda_2} \cdot ... \cdot P_{\lambda_m}$ утворюють лінійний базис в $P_s(\ell_1)$, де $P_{\lambda_k}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\lambda_k}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ — деяке розбиття натурального числа n, тобто $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m = n$.

Симетричні аналітичні функції від нескінченної кількості змінних досліджувались в роботах [3, 4, 5]. У цій роботі ми розглядаємо гільбертові простори, породжені симетричними поліномами на ℓ_1, і встановлюємо умови, при яких елементи цих просторів

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46J15, 46J20, 46E15.

Ключові слова і фрази: симетричні аналітичні функції на банахових просторах, гільбертові простори аналітичних функцій.

будуть аналітичними функціями у деякій області $\Omega \subset \ell_1$. У першому розділі доведено загальний результат, який оцінює радіус кулі в ℓ_1, що міститься в Ω. У другому розділі показано, що Ω, в загальному випадку, не збігається з цією кулею, і побудовано Ω для одного конкретного випадку, використовуючи абстрактні простори Фока.

Розглянемо на $P_s(\ell_1)$ деякий скалярний добуток $\langle P_\lambda, P_\mu\rangle = b_{\lambda\mu}\delta_{\lambda\mu}$, де $\delta_{\lambda\mu}$ — символ Кронекера, $b_{\lambda\lambda} = b_\lambda > 0$. Даний скалярний добуток породжує норму

$$\|P_\lambda\| = \sqrt{\langle P_\lambda, P_\lambda\rangle} = \sqrt{b_\lambda}.$$

Поповнення простору $P_s(\ell_1)$ відносно даної норми позначимо $H_s(\ell_1)$. В цій роботі досліджуються умови на b_λ, при яких простір $H_s(\ell_1)$ є простором аналітичних функцій в деякій області ℓ_1.

На просторі $P_s(\ell_1)$ також можна визначити норму

$$\|P\|_{\sup} = \sup_{\|x\|\leq 1} |P(x)|.$$

Легко бачити, що $\|P_\lambda\|_{\sup} = 1$.

1 Простір аналітичних функцій

Очевидно, що значення в точці $x \in \ell_1$ породжує функціонал $\delta_x : P \mapsto P(x)$, $P \in P_s(\ell_1)$. Ми розглянемо питання: при яких x функціонал δ_x буде неперервним?

Припустимо, що для деякого $x \in \ell_1$, δ_x — неперервний. Тоді його можна продовжити за неперервністю до лінійного функціонала на $H_s(\ell_1)$. За теоремою Ріса існує елемент $R_x \in H_s(\ell_1)$, такий що

$$\delta_x(P) = P(x) = \langle P, R_x\rangle.$$

Знайдемо цей елемент.

Якщо такий елемент R_x існує та оскільки $\dfrac{P_\lambda}{\|P_\lambda\|} = \dfrac{P_\lambda}{\sqrt{b_\lambda}}$ — ортонормований базис в $H_s(\ell_1)$, то $\delta_x\Big(\dfrac{P_\lambda}{\sqrt{b_\lambda}}\Big) = \dfrac{P_\lambda(x)}{\sqrt{b_\lambda}} = \Big\langle \dfrac{P_\lambda}{\sqrt{b_\lambda}}, R_x\Big\rangle$. Тому

$$R_x = \sum_\lambda \frac{P_\lambda}{\sqrt{b_\lambda}} \frac{\overline{P_\lambda(x)}}{\sqrt{b_\lambda}} = \sum_\lambda \frac{P_\lambda}{b_\lambda}\overline{P_\lambda(x)}. \tag{1}$$

Отже, R_x є визначеним для тих елементів x, для яких ряд (1) збігається в $H_s(\ell_1)$. Знайдемо область збіжності даного ряду.

$$\|R_x\|_{H_s} = \Big\|\sum_\lambda \frac{P_\lambda}{b_\lambda}\overline{P_\lambda(x)}\Big\|_{H_s} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\Big\|\sum_{|\lambda|=n}\frac{P_\lambda}{b_\lambda}\overline{P_\lambda(x)}\Big\|_{H_s} \leq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{|\lambda|=n}\Big\|\frac{P_\lambda}{b_\lambda}\Big\|_{H_s}|P_\lambda(x)| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{|\lambda|=n}\frac{|P_\lambda(x)|}{\sqrt{b_\lambda}} \leq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{|\lambda|=n}\frac{\|P_\lambda\|_{\sup}\|x\|_{\ell_1}^n}{\sqrt{b_\lambda}}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{|\lambda|=n}\frac{\|x\|_{\ell_1}^n}{\sqrt{b_\lambda}}.$$

Позначимо через $p(n)$ — кількість розбиттів λ натурального числа n. Нехай

$$d_n=\max_{|\lambda|=n}\frac{1}{\sqrt{b_\lambda}}. \tag{2}$$

Тоді

$$\|R_x\|_{H_s}\le\sum_{n=1}^{\infty}p(n)d_n\|x\|_{\ell_1}^n.$$

Використовуючи формулу Коші-Адамара та відому асимптотику для $p(n)$, можна оцінити радіус збіжності ряду:

$$r\ge\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}(p(n)d_n)^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}d_n^{\frac{1}{n}}}.$$

Таким чином, ми довели наступну теорему.

Теорема 1. *Простір $H_s(\ell_1)$ є простором аналітичних функцій в кулі з центром в нулі радіуса*

$$r=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}d_n^{\frac{1}{n}}}$$

в ℓ_1, де константи d_n визначаються формулою (2).

З теореми 1 маємо, що коли $\|P_\lambda\|_{H_s}\ge 1$ для довільного розбиття λ, то $H_s(\ell_1)$ є простором аналітичних функцій на одиничній кулі в ℓ_1.

2 Зв'язок з абстрактними просторами Фока

Зауважимо, що в деяких випадках можна зробити точнішу оцінку для області збіжності ряду (1). Нам потрібні будуть деякі відомі результати стосовно абстрактних просторів Фока. Нехай E — гільбертів простір з ортонормованим базисом (e_n). Скажемо, що гільбертів простір $\mathcal{F}=\mathcal{F}(E)$ з нормою $\|\cdot\|_\eta$ є *(абстрактним) симетричним простором Фока над простором E*, якщо вектори $1, e_{[i]}^{(k)}=e_{i_1}^{k_1}\dots e_{i_n}^{k_n}$ утворюють ортогональний базис в $\mathcal{F}$, де $n=|(k)|=k_1+\dots+k_n\in\mathbb{N}$, $k_j\ge 0$, $i_1<\dots<i_n$,

$$e_{i_1}^{k_1}\dots e_{i_n}^{k_n}=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma}\overbrace{e_{\sigma(i_1)}\otimes\dots\otimes\ e_{\sigma(i_1)}}^{k_1}\otimes\dots\otimes\overbrace{e_{\sigma(i_n)}\otimes\dots\otimes e_{\sigma(i_n)}}^{k_n}$$

є симетричним тензорним добутком векторів.

Покладемо $c_{[i]}^{(k)}:=\left\|e_{[i]}^{(k)}\right\|_\eta^{-2}$ і $c_0=1$. Розглянемо степеневий ряд

$$\eta(x)=\sum_{k_1+\dots+k_n=0}^{\infty}\sum_{i_1<\dots<i_n}c_{i_1\dots i_n}^{k_1\dots k_n}x_{i_1}^{k_1}\dots x_{i_n}^{k_n}e_{i_1}^{k_1}\dots e_{i_n}^{k_n}=\sum_{|(k)|=0}^{\infty}\sum_{[i]}c_{[i]}^{(k)}x_{[i]}^{(k)}e_{[i]}^{(k)} \tag{3}$$

для будь-якого $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_ie_i\in E$.

Наступну теорему доведено в [2].

Теорема 2. *Припустимо, що існує константа $S>0$ і послідовність додатних чисел (M_n), така що для кожного n $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{M_n}=M\le\infty$ і*

$$0<c_{[i]}^{(k)}=c_{i_1\dots i_n}^{k_1\dots k_n}\le SM_n^2\frac{(k_1+\dots+k_n)!}{k_1!\dots k_n!}=SM_n^2\frac{n!}{k_1!\dots k_n!}, \tag{4}$$

де $n=k_1+\dots+k_n$. Тоді

(i) *ряд (3) збігається для кожного $x\in E$, $\|x\|<1/M$ і η є аналітичним відображенням на кулі $B(0,1/M)\subset E$ з центром в нулі радіуса $1/M$ зі значенням в $\mathcal{F}$;*

(ii) *для кожного $\varphi\in\mathcal{F}$ відображення $f_\varphi(x)=\langle\eta(x)\mid\varphi\rangle$ є аналітичною функцією на $B(0,1/M)\subset E$;*

(iii) *функція $\left\langle\eta(x)\middle|e_{[i]}^{(k)}\right\rangle$ є n-однорідним поліномом і $\left\langle\eta(x)\middle|e_{[i]}^{(k)}\right\rangle=x_{i_1}^{k_1}\dots x_{i_n}^{k_n}$.*

Твердження 2.1. *Відображення*

$$\xi\colon P_\lambda\mapsto e_{\lambda_1}\dots e_{\lambda_m},\qquad \lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$$

задає ізометричний ізоморфізм простору $H_s(\ell_1)$ на абстрактний симетричний простір Фока $\mathcal{F}=\mathcal{F}(E)$, для якого константи $c_{[i]}^{(k)}$ з формули (3) визначаються рівністю $c_{[i]}^{(k)}=\|P_{i_1}^{k_1}\dots P_{i_n}^{k_n}\|^{-2}$. Ізоморфізм ξ є мультиплікативним на підпросторі поліномів у $H_s(\ell_1)$.

Доведення цього твердження безпосередньо випливає з означень. Зауважимо, що замкнена лінійна оболонка $\{P_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ є прообразом простору E при відображенні ξ.

Позначимо Ω — область в ℓ_1

$$\Omega=\{x\in\ell_1\colon|P_n(x)|<1,\ n\in\mathbb{N}\}.$$

Легко бачити, що Ω містить відкриту одиничну кулю простору ℓ_1 як власну підмножину.

Твердження 2.2. *Множина Ω є необмеженою і відкритою підмножиною в ℓ_1. Крім того, для кожного $x\in\Omega$ $\sum|P_n(x)|<\infty$.*

Доведення. Покажемо, що існує необмежена послідовність в ℓ_1, яка належить Ω. Розглянемо числову послідовність

$$x_n=(-1)^n\frac{6}{\pi^2n}.$$

Нехай $(z_{(m)})$ — послідовність з ℓ_1, така що $z_{(m)}=(x_1,x_2,\dots,x_m,0,0,\dots)$.

Оскільки $P_n(z_{(m)})<1\quad\forall n,m$, то $z_{(m)}\in\Omega$. З іншого боку, очевидно, що $\|z_{(m)}\|\to\infty$ при $m\to\infty$. Отже, Ω є необмеженою множиною.

Зауважимо, що коли $x=\sum x_ke_k\in\Omega$, то $|x_k|<1$ для кожного k. Тобто Ω лежить у відкритій підмножині

$$\mathbb{D}_1=\{x\in\ell_1\colon\forall k\in\mathbb{N}\quad|x_k|<1\}.$$

Розглянемо відображення $\Psi(x) = (P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots)$. У роботі [4] показано, що Ψ — неперервне відображення і $\Psi\colon \mathbb{D}_1 \to \ell_1$. Тому $\sum |P_n(x)| < \infty$. З іншого боку, Ω є прообразом відкритої множини $\mathbb{D}_1$ при відображенні Ψ. Тому Ω — відкрита підмножина. $\square$

Розглянемо абстрактний простір Фока $\mathcal{F}$ з нормою $\left\|e_{[i]}^{(k)}\right\|_\eta = 1$. Згідно формули (3), цій нормі відповідає відображення η:

$$\eta(y) = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} y_i^k e_i^k = \sum_{|(k)|=0}^{\infty} \sum_{[i]} y_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)},$$

де $y_i = (y, e_i)$ — координати вектора $y \in \ell$. В роботі [1] показано, що η є аналітичним відображенням з $\mathbb{D}_2 \supset \mathbb{D}_1$ в $\mathcal{F}$, де

$$\mathbb{D}_2 = \{x \in \ell_2 \colon \forall k \in \mathbb{N} \quad |x_k| < 1\}$$

є відкритою підмножиною в ℓ_2.

Оскільки відображення ξ є ізометричним ізоморфізмом з $H_s(\ell_1)$ в $\mathcal{F}$, то $\xi(R_x) \in \mathcal{F}$ для кожного $x \in \ell_1$, $\|x\| < 1$. Покажемо, що елемент R_x коректно визначений для всіх $x \in \Omega$. Для цього достатньо показати, що $\xi(R_x) \in \mathcal{F}$ при $x \in \Omega$. З формули (1) маємо

$$\xi(R_x) = \xi\Big(\sum_{\lambda} P_\lambda \overline{P_\lambda(x)}\Big) = \sum_{\lambda} e_\lambda \overline{P_\lambda(x)}. \tag{5}$$

Оскільки $|P_n(x)| < 1$ і ряд $\sum |P_n(x)|$ збігається для кожного $x \in \Omega$, то

$$\sum_{\lambda} |P_\lambda(x)|^2 \le \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |P_i(x)|^{2k} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - |P_i(x)|^2}.$$

З іншого боку,

$$\ln\Big(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - |P_i(x)|^2}\Big) = -\ln \prod_{i=1}^{\infty}(1 - |P_i(x)|^2) \le -\sum_{i=1}^{\infty}(-|P_i(x)|^2) = \sum_{i=1}^{\infty} |P_i(x)|^2.$$

Тому

$$\|\xi(R_x)\|^2 = \sum_{\lambda} |P_\lambda(x)|^2 \le \exp\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |P_i(x)|^2\Big) < \infty.$$

Отже, $\xi(R_x) \in \mathcal{F}$, тобто $R_x \in H_s(\ell_1)$ для всіх $x \in \Omega$. Таким чином, ми довели наступну теорему.

Теорема 3. *Нехай $\|P_\lambda\| = 1$ для довільного розбиття λ. Тоді $H_s(\ell_1)$ є простором аналітичних функцій на Ω. При цьому*

$$F(x) = \langle F, R_x \rangle = \langle \xi(F), \xi(R_x) \rangle, \quad x \in \Omega, \quad F \in H_s(\ell_1).$$

Зауважимо, що коли $x \notin \Omega$, то для деякого m $|P_m(x)| > 1$. Тоді у формулі (5) ряд буде містити розбіжний доданок $\sum_k e_m^k \overline{(P_m(x))^k}$. Тому R_x не буде коректно визначеним. Отже, область Ω у теоремі 3 не може бути розширеною.

Література

1. А.В. Загороднюк, М.А. Митрофанов, *Аналітичні функції на одиничному диску гільбертового простору* // Вісник Львів. ун-ту. серія мех.-мат. – 2004. – Т.63. – С. 80–87.
2. А. Загороднюк, З. Можировська, *Гільбертові простори цілих функцій від нескінченної кількості змінних* // Математичний вісник НТШ. – 2006. – Т.3. – С. 44–55.
3. R. Alencar, R. Aron, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk, *Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p*, Bull. Lond. Math. Soc. **35** (2003), 55–64.
4. I. Chernega, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk, *Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra*. Proc. Edinburgh Math. Soc. (to appear).
5. M. González, R. Gonzalo and J. Jaramillo, *Symmetric polynomials on rearrangement invariant function space*, J. London Math. Soc. **59**. 2 (1999), 681–697.

Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України,
Львів, Україна

Надійшло 15.12.2010

Holubchak O.M. *Hilbert spaces of symmetric analytical functions on ℓ_1*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 34–39.

We consider completions of the space of symmetric polynomials on ℓ_1 with respect to some Hilbert norm and investigate conditions under which the obtained spaces consist of analytic functions with domains in ℓ_1. Some connections with abstract Fock spaces are established.

Голубчак О.М. *Гильбертовы пространства симметрических функций на ℓ_1* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 34–39.

В работе рассмотрены пополнения пространства симметрических полиномов на ℓ_1 относительно некоторой гильбертовой нормы и исследованы условия, при которых полученное пространство будет пространством аналитических функций на ℓ_1. Рассмотрена связь с абстрактными пространствами Фока.

Карпатські математичні публікації. Т.3. №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3. №1

УДК 517.98

Дубей М.В., Загороднюк А.В.

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ ЛІПШИЦЕВО-ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ТА ЛІПШИЦЕВО-АНАЛІТИЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Дубей М.В., Загороднюк А.В. *Лінеаризація ліпшицево-поліноміальних та ліпшицево-аналітичних відображень* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 40–48.

У статті введено поняття ліпшицево-поліноміальних та ліпшицево-аналітичних функцій, аналоги тензорного та симетричного тензорного добутку метричних просторів. Використовуючи аналоги тензорного добутку метричних просторів та процес лінеаризації аналітичних функцій, здійснено глобальну лінеаризацію ліпшицево-поліноміальних та ліпшицево-аналітичних відображень.

Вступ

Нехай X — непорожній метричний простір, зафіксуємо у ньому деяку точку θ_x. Такий метричний простір називається *простором з відміченою точкою*. Нагадаємо, що відображення f між метричними просторами X та Y називається *ліпшицевим*, якщо існує стала L_f така, що для довільних елементів $x_1, x_2 \in X$ справедлива нерівність $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L_f \rho_X(x_1, x_2)$, де найменша з можливих сталих L_f називається сталою Ліпшица. Простір усіх ліпшицевих відображень з метричного простору X з відміченою точкою θ_x у метричний простір Y з відміченою точкою θ_y, які переводять θ_x в θ_y, позначається $\mathrm{Lip}_0(X, Y)$. У випадку, коли Y є лінійним простором, ми завжди вважатимемо, що $\theta_y = 0$. Загальна теорія ліпшицевих відображень викладена у монографіях Н. Вівера [11], І. Беніаміні, Ж. Лінденштрауса [4]. У роботі В. Пестова [10] доведено, що для довільного метричного простору X з відміченою точкою θ_x існує єдиний (з точністю до ізометричного ізоморфізму) банахів простір $B(X)$ такий, що метричний простір X вкладається у банахів простір $B(X)$ і кожне відображення $f(x) \in \mathrm{Lip}_0(X, E)$ може бути продовжене до лінійного оператора $\widetilde{f}(x) : B(X) \to E$ для довільного нормованого простору E, причому $\|\widetilde{f}\| = L_f$. Позначимо через $\mathrm{span}\, X$ лінійну оболонку простору X, а елементи з лінійної оболонки через $\underline{x}$. За побудовою, елементи вигляду $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \underline{x_k}$ є щільними у просторі $B(X)$. Простір $B(X)$ називається *вільним банаховим простором*.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 26A16, 45G25.

Ключові слова і фрази: тензорний добуток, ліпшицеве відображення, метричний простір, вільний банахів простір.

Деякий клас $\mathcal{F}(X, Y)$ нелінійних відображень з X в Y *допускає глобальну лінеаризацію*, якщо існує лінійний простір $W(X)$ та ін'єктивне відображення $\mathcal{U}_{\mathcal{F}(X,Y)} : X \to W(X)$ таке, що для довільного $F \in \mathcal{F}(X, Y)$ існує лінійний оператор $L_F \in \mathcal{L}(W(X), Y)$, для яких наступна діаграма є комутативною.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathcal{U}_{\mathcal{F}(X,Y)}"'] & Y \\ W(X) \arrow[ur, "L_F"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

Відображення $\mathcal{U}_{\mathcal{F}(X,Y)}$ при цьому називається *канонічним відображенням* у даній лінеаризації.

Вільний банахів простір $B(X)$ та відображення $\nu : X \to B(X)$, $\nu(x) = \underline{x}$ задають лінеаризацію нелінійних функцій з класу $\mathrm{Lip}_0(X, E)$. Лінеаризацію ліпшицевих функцій досліджували Д. Райков [2], Р. Аренс та Ж. Ілс [3], Ж. Флуд [7], Ж. Годефруа, Н. Калтон [8] та інші. В роботі [6] автори досліджують властивості вільних банахових просторів.

Добре відомо, що поліноміальні та деякі класи аналітичних відображень банахового простору допускають глобальну лінеаризацію, з використанням тензорних добутків та їх топологічних сум. Метою цієї роботи є поєднання техніки вільних банахових просторів та тензорних добутків для лінеаризації і дослідження широкого класу відображень на метричних просторах, які в роботі названо ліпшицево-поліноміальними та ліпшицево-аналітичними.

У першому розділі досліджено аналоги тензорних добутків метричних просторів і введено ліпшицево-поліноміальні відображення.

У другому розділі розглянуто широкий клас аналітичних відображень на комплексних банахових просторах, який допускає глобальну лінеаризацію, і застосовано його для дослідження ліпшицево-аналітичних відображень.

1 Тензорні добутки метричних просторів

Нехай X, Y – метричні простори. Побудуємо множину

$$\Omega_X = \{\underline{x} - \underline{x'} \,|\, x, x' \in X, x \neq x'\} \cup \theta_x \subset B(X),$$

аналогічно можна побудувати множину Ω_Y. Розглянемо лінійний простір Σ формальних сум $\sum\limits_i \lambda_i (x_i, y_i)$, де $(x_i, y_i) \in \Omega_X \times \Omega_Y$. Очевидно, що множина елементів

$$\Sigma_0 = \sum_k \gamma_k (x_k, \theta_y) + \sum_j \mu_j (\theta_x, y_j)$$

є лінійним підпростором Σ.

Розглянемо фактор-простір $\widetilde{\Sigma} = \Sigma / \Sigma_0$. Позначимо клас еквівалентності елемента (x, y) через $x \diamond y$. Тензорним добутком метричних просторів X, Y називатимемо множину $X \diamond Y = \{x \diamond y \,|\, x \in \Omega_X, y \in \Omega_Y\}$. Для кожного елемента $\omega \in \widetilde{\Sigma}$ визначимо норму

$$\|\omega\| := \inf \sum_k |\lambda_k| \|\underline{u_k} - \underline{u'_k}\| \|\underline{v_k} - \underline{v'_k}\|, \tag{2}$$

де інфімум береться по всіх зображеннях елемента ω у такому вигляді:

$$\omega = \sum_k \lambda_k(\underline{u_k} - \underline{u'_k}) \diamond (\underline{v_k} - \underline{v'_k}) \tag{3}$$

де $u_k, u'_k \in X, v_k, v'_k \in Y$. У статті [1] доведено наступне твердження.

Твердження 1.1. *Поповнення простору $\widetilde{\Sigma}$ відносно норми (2) ізометрично ізоморфне проективному тензорному добутку $B(X)\widehat{\bigotimes}_\pi B(Y)$ банахових просторів $B(X)$ та $B(Y)$.*

Зокрема, з цієї теореми випливає, що $X \diamond Y$ вкладається в $B(X)\widehat{\otimes}_\pi B(Y)$. Проективна тензорна норма простору $B(X)\widehat{\otimes}_\pi B(Y)$ індукує метрику на $X \diamond Y$, яка має вигляд

$$\begin{aligned} &\rho((x_1 - x'_1) \diamond (y_1 - y'_1), (x_2 - x'_2) \diamond (y_2 - y'_2)) = \\ &\|(\underline{x_1} - \underline{x'_1}) \diamond (\underline{y_1} - \underline{y'_1}) - (\underline{x_2} - \underline{x'_2}) \diamond (\underline{y_2} - \underline{y'_2})\| = \\ &\|(x_1 - x'_1) \otimes (y_1 - y'_1) - (x_2 - x'_2) \otimes (y_2 - y'_2)\|_\pi. \end{aligned} \tag{4}$$

Таким чином, $X \diamond Y$ є метричним простором з відміченою точкою $\theta_X \diamond \theta_Y$.

Нехай Z – метричний простір з відміченою точкою θ_z. Побудуємо тензорний добуток $(X \diamond Y) \diamond Z$. Лінійний простір формальних сум запишеться у такому вигляді:

$$\Sigma = \sum_i \lambda_i(x_i \diamond y_i, z_i),$$

де $(x_i \diamond y_i, z_i) \in \Omega_{X\diamond Y} \times \Omega_Z$, і $\Omega_Z = \{\underline{z} - \underline{z'} | z, z' \in Z, z \neq z'\} \cup \theta_z$, а множина $\Omega_{X\diamond Y}$ має наступне зображення

$$\Omega_{X\diamond Y} = \{\underline{x \diamond y} - \underline{x' \diamond y'} \mid x \diamond y, x' \diamond y' \in X \diamond Y\} \cup \theta_x \diamond \theta_y \subset B(X \diamond Y),$$

де $x \diamond y$ та $x' \diamond y'$ не належать до одного класу еквівалентності.

Покладемо у відповідність елементу з простору $(X \diamond Y) \times Z$ елемент з простору $X \times Y \times Z$ за таким правилом:

$$(x_i \diamond y_i, z_i) = ((x_i, y_i) + (\theta_x, y_i) + (x_i, \theta_y), z_i) = (x_i, y_i, z_i) + (\theta_x, y_i, z_i) + (x_i, \theta_y, z_i). \tag{5}$$

Тоді $\Sigma = \sum\limits_i \lambda_i((x_i, y_i, z_i) + (x_i, \theta_y, z_i) + (\theta_x, y_i, z_i))$. Підпростір Σ_0 у цьому випадку матиме вигляд $\Sigma_0 = \sum\limits_k \alpha_k(x_k \diamond y_k, \theta_z) + \sum\limits_j \beta_j(\theta_x \diamond \theta_y, z_j)$. Враховуючи (5), отримаємо, що

$$\Sigma_0 = \sum_k \alpha_k((x_k, y_k) + (x_k, \theta_y) + (\theta_x, y_k), \theta_z)) + \sum_j \beta_j(\theta_x, \theta_y, z_j) =$$

$$\sum_k \alpha_k((x_k, y_k, \theta_z) + (x_k, \theta_y, \theta_z) + (\theta_x, y_k, \theta_z)) + \sum_j \beta_j(\theta_x, \theta_y, z_j).$$

Розглянемо фактор-простір $\widetilde{\Sigma} = \Sigma/\Sigma_0$. Аналогічно, як у випадку двох просторів, клас еквівалентності елемента $((x, y), z)$ позначимо через $(x \diamond y) \diamond z$. Тензорним добутком $(X \diamond Y) \diamond Z$ метричного простору $X \diamond Y$ та метричного простору Z назвемо множину класів еквівалентності $(x \diamond y) \diamond z$, тобто

$$(X \diamond Y) \diamond Z = \{(x \diamond y) \diamond z | x \diamond y \in \Omega_{X\diamond Y}, z \in Z\}.$$

Аналогічно можна побудувати тензорний добуток

$$X \diamond (Y \diamond Z) = \{x \diamond (y \diamond z) | x \in X, y \diamond z \in \Omega_{Y\diamond Z}\}.$$

Твердження 1.2. *Простори $(X \diamond Y) \diamond Z$ та $X \diamond (Y \diamond Z)$ є ізометрично ізоморфними.*

Доведення. Побудуємо відображення $I : (x \diamond y) \diamond z \mapsto x \diamond (y \diamond z)$, яке кожному класу $(x \diamond y) \diamond z$ ставить у відповідність клас $x \diamond (y \diamond z)$. Запишемо метрику простору $(X \diamond Y) \diamond Z$:

$$\rho((x_1 \diamond y_1) \diamond z_1, (x_2 \diamond y_2) \diamond z_2) = \|(x_1 \diamond y_1) \diamond z_1 - (x_2 \diamond y_2) \diamond z_2\| =$$

$$\|(x_1 \otimes y_1) \otimes z_1 - (x_2 \otimes y_2) \otimes z_2\|_\pi = \|x_1 \otimes y_1 \otimes z_1 - x_2 \otimes y_2 \otimes z_2\|_\pi.$$

Метрика простору $X \diamond (Y \diamond Z)$ матиме такий вигляд:

$$\rho(x_1 \diamond (y_1 \diamond z_1), x_2 \diamond (y_2 \diamond z_2)) = \|x_1 \diamond (y_1 \diamond z_1) - x_2 \diamond (y_2 \diamond z_2)\| =$$

$$\|x_1 \otimes (y_1 \otimes z_1) - x_2 \otimes (y_2 \otimes z_2)\|_\pi = \|x_1 \otimes y_1 \otimes z_1 - x_2 \otimes y_2 \otimes z_2\|_\pi.$$

Очевидно, що I є бієктивним ізометричним відображенням, тому простори $(X \diamond Y) \diamond Z$ та $X \diamond (Y \diamond Z)$ є ізометрично ізоморфними. □

Таким чином, ми можемо побудувати тензорний добуток трьох метричних просторів двома способами, і ці множини співпадуть з точністю до ізометричного ізоморфізму. Позначимо його $X \diamond Y \diamond Z$. Зауважимо, що тензорний добуток $X \diamond Y \diamond Z$ вкладається у простір $B(X)\widehat{\otimes}_\pi B(Y)\widehat{\otimes}_\pi B(Z)$ і проективна тензорна норма індукує метрику на $X \diamond Y \diamond Z$.

Тензорний добуток трьох метричних просторів також буде метричним простором з відміченою точкою $\theta_x \diamond \theta_y \diamond \theta_z$.

Аналогічно, за індукцією, якщо ми побудували тензорний добуток $n-1$ метричного простору, то n-тий тензорний добуток метричних просторів можна ввести як тензорний добуток простору X_n та тензорного добутку метричних просторів X_i, де $i = 1, 2, ..., n-1$, тобто $X_1 \diamond X_2 \diamond \cdots \diamond X_{n-1} \diamond X_n = (X_1 \diamond X_2 \diamond \cdots \diamond X_{n-1}) \diamond X_n$ або $X_1 \diamond X_2 \diamond \cdots \diamond X_{n-1} \diamond X_n = X_1 \diamond (X_2 \diamond \cdots \diamond X_{n-1} \diamond X_n)$. Тензорний добуток n метричних просторів вкладається у $\widehat{\otimes}^n_\pi B(X_i) = B(X_1 \diamond X_2 \diamond \cdots \diamond X_n)$, де $i = 1, 2, ..., n$ і проективна тензорна норма індукує метрику на $X_1 \diamond X_2 \diamond \cdots \diamond X_{n-1} \diamond X_n$, тому тензорний добуток n метричних просторів також буде метричним простором з відміченою точкою $\theta_{x_1} \diamond \theta_{x_1} \diamond \cdots \diamond \theta_{x_n}$.

Для метричного простору X можна ввести поняття симетричного тензорного добутку. Симетричним тензорним добутком назвемо таку множину

$$X \diamond_s X = \{x_1 \diamond_s x_2 | x_1, x_2 \in \Omega_X\},$$

де

$$x_1 \diamond_s x_2 := \frac{x_1 \diamond x_2 + x_2 \diamond x_1}{2}.$$

Зауважимо, що $X \diamond_s X \subset X \diamond X$. Аналогічно можна будувати n-тий симетричний тензорний степінь $\diamond^n_s X$ метричного простору X. Очевидно, що при цьому $B(\diamond^n_s X) = \widehat{\otimes}^n_{s,\pi} B(X)$. Тому $B'(\diamond^n_s X) = \mathcal{L}(^n B(X))$ — простір всіх n-лінійних симетричних відображень на $B(X)$. Будемо позначати $\underbrace{x \diamond x \diamond \cdots \diamond x}_{n}$ через $x^{\diamond n}$, а $\underbrace{x \otimes x \otimes \cdots \otimes x}_{n}$ — через $x^{\otimes n}$. Відомо [5], що на $\widehat{\otimes}^n_{s,\pi} B(X)$ існує норма, еквівалентна до норми, індукованої з $\widehat{\otimes}^n_\pi B(X)$, і така, що для кожного $u \in B(X)$

$$\|u^{\otimes n}\| = \sup\{|P(u)| P \in \mathcal{P}(^n B(X)), \|P\| \leq 1\},$$

де $\mathcal{P}(^nB(X))$ — банахів простір n-однорідних неперервних поліномів на $B(X)$. Звуження цієї норми на $\circ_s^n X$ породжує метрику, яка буде ліпшицево еквівалентною до метрики, індукованої з $\circ_s^n X$. Нагадаємо, що метрика ρ_1 є ліпшицево еквівалентною до метрики ρ_2, якщо існують сталі $c_1 > 0, c_2 > 0$, такі що

$$c_2\rho_2(x_1, x_2) \leq \rho_1(x_1, x_2) \leq c_1\rho_2(x_1, x_2)$$

для всіх елементів x_1, x_2 метричного простору X.

Нехай X, Y — метричні простори, позначимо через $\mathbb{P}(^nX, Y)$ множину відображень з X в Y таких, що для довільного відображення $F \in \mathbb{P}(^nX, Y)$ існує n-однорідний неперервний поліном $P_F \in \mathcal{P}(^nB(X), B(Y))$, для якого $P_F(\underline{x}) = \underline{F(x)}$ для довільного $x \in X$. Елементи класу $\mathbb{P}(^nX, Y)$ будемо називати *n-однорідними ліпшицево-поліноміальними відображеннями* з простору X у простір Y.

Твердження 1.3. *Для кожного $F \in \mathbb{P}(^nX, Y)$ існує ліпшицеве відображення $\Phi_F(\circ_s^n X, Y)$, таке що*

$$\Phi_F(x^{\circ x}) = F(x) \quad i \quad L_{\Phi_F} = \|P\|.$$

Доведення. Нехай P_F — n-однорідний поліном з $B(X)$ в $B(Y)$, який відповідає відображенню F. Цьому поліному відповідає лінійний оператор

$$\widetilde{P}_F : \widehat{\otimes}_{s,\pi}^n B(X) \to B(Y),$$

такий що $\widetilde{P}_F(\underline{x}^{\otimes n}) = P_F(\underline{x})$.

Оскільки $\widehat{\otimes}_{s,\pi}^n B(X) = B(\circ_{s,\pi}^n X)$, то лінійному оператору $\widetilde{P}_F$ відповідає ліпшицеве відображення $\widetilde{\Phi}_F : \circ_s^n X \to B(Y)$, таке що $\widetilde{\Phi}_F(x^{\circ n}) = P_F(\underline{x}) = \underline{F(x)}$. Образ $F(x)$ міститься в Y, тому $\underline{F(x)} \subset \nu_Y(Y)$, де $\nu_Y : y \mapsto \underline{y}$ — ізометричне вкладення. Покладемо

$$\Phi_F = \nu_Y^{-1} \circ \widetilde{\Phi}_F,$$

це і буде шуканим відображенням, крім того,

$$L_{\Phi_F} = L_{\widetilde{\Phi}_F} = \|P_F\| = \|P\|.$$

□

З твердження 1.3 випливає, що $\mathbb{P}(^nX, Y)$ є банаховим простором, ізоморфним до простору $\mathcal{P}(^nB(X), B(Y))$ n-однорідних поліномів з $B(X)$ в $B(Y)$.

Нехай γ — деяка тензорна норма на $B(X)$. Тоді $\widehat{\otimes}_{s,\pi}^n B(X) \subset \widehat{\otimes}_{s,\gamma}^n B(X)$. Тому простір лінійних неперервних операторів з $\widehat{\otimes}_{s,\gamma}^n B(X)$ в довільний банахів простір E є природно ізоморфний до деякого підпростору n-однорідних поліномів у $\mathcal{P}(^nB(X), E)$.

Розглянемо випадок, коли $Y = E$ — лінійний метричний простір. Тоді можна визначити неперервне поліноміальне відображення $P \in \mathcal{P}(^nB(X), E)$. Позначимо через h_0 відображення, яке кожному елементу $z \in \operatorname{span} E$, $z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \underline{x_k}$ ставить у відповідність елемент $h_0(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k \in E$. У [6] показано, що коли E — банахів простір, то h_0 — лінійний обмежений оператор, який можна продовжити за лінійністю і неперервністю до оператора $h : B(E) \to E$, причому $\|h\| = 1$ і відображення $x \mapsto \underline{h(x)}$ є ліпшицевою ретракцією з $B(E)$ в $\underline{E} \subset B(E)$.

Теорема 1. *Нехай E — лінійний метричний простір, такий що відображення*

$$h : B(E) \to E$$

коректно визначене і є лінійним неперервним оператором. Тоді для кожного

$$F \in \mathbb{P}(^nX, E)$$

існує поліном $P \in \mathcal{P}(^nB(X), E)$ такий, що $P(\underline{x}) = F(x)$ для всіх $x \in X$. І навпаки, якщо $P \in \mathcal{P}(^nB(X), E)$, то $P(\underline{x}) \in \mathbb{P}(^nX, E)$.

Доведення. Нехай $F \in \mathbb{P}(^nX, E)$, тоді $P_F \in \mathcal{P}(^nB(X), B(E))$. Визначимо відображення $P = h \circ P_F$, тоді $P(\underline{x}) = h(P_F(\underline{x})) = h(\underline{F(x)}) = F(x)$.

Навпаки, нехай $P \in \mathcal{P}(^nB(X), E)$. Поліному P відповідає ліпшицеве відображення $\Phi : \circ_s^n X \to E$ з ліпшицевою константою $L_\Phi = \|P\|$. Тому відображення $\psi : \circ_s^n X \to B(E)$, $\psi(u) = \underline{\Phi(u)}$, буде ліпшицевим і $L_\psi = L_\Phi = \|P\|$. Відображенню ψ відповідає n-однорідний неперервний поліном, який ми позначимо P_F, $P_F : B(X) \to B(E)$, $P_F(z) = \psi(z^{\circ n})$ для довільного $z \in B(X)$. Тоді $P_F(\underline{x}) = \underline{P(x)}$ і $F(x) = h(\underline{P(\underline{x})}) = P(\underline{x}) \in \mathbb{P}(^nX, E)$. □

Наслідок 1.1. *В умовах теореми відображення $P(x) \mapsto P(\underline{x})$ є ізоморфізмом банахових просторів $\mathcal{P}(^nB(X), E)$ та $\mathbb{P}(^nX, E)$.*

2 Лінеаризація аналітичних та ліпшицево-аналітичних функцій

Простір всіх аналітичних відображень на відкритій множині U зі значеннями у банаховому просторі Y будемо позначати через $H(U, Y)$. Аналітичні функції також допускають лінеаризацію з використанням тензорного добутку. Відомості з теорії аналітичних функцій на банахових просторах можна знайти у [5].

Нехай $\xi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ — деяка аналітична функція однієї комплексної змінної в околі нуля радіуса $\rho_0 = \frac{1}{\limsup |c_n|^{\frac{1}{n}}}$. Нехай X — комплексний банахів простір, $\otimes_{\gamma,s}^n X$ — n-тий симетричний тензорний степінь простору X, поповнений відносно деякої тензорної норми γ. Позначимо через $F_\xi(x)$ формальний ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^{\otimes n}$. Нехай $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma} = \mathcal{F}_{\alpha,\gamma}(X)$ — простір $(\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty})_\alpha \bigotimes_{\gamma,s}^n X$ скінченних прямих сум $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \bigotimes_{\gamma,s}^n X$, поповнений відносно деякої норми α.

Нагадаємо означення радіуса рівномірної збіжності та радіуса обмеженості аналітичної функції [5]. Нехай $f \in H(U, Y)$, де U — відкрита підмножина в X і $x \in U$. *Радіус рівномірної збіжності* $\varrho_x(f)$ функції f в точці x визначається як супремум тих λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, що $x + \lambda B \subset U$ і ряд Тейлора функції f в околі точки x збігається до f рівномірно на множині $x + \lambda B$, де B — одинична куля в X. *Радіус обмеженості* f в точці x визначається як супремум тих λ, $\lambda \in \mathbb{C}$, що f є обмеженою функцією на множині $x + \lambda B$. Відомо [5], що радіус рівномірної збіжності аналітичної функції дорівнює радіусу обмеженості.

Твердження 2.1. *F_ξ є аналітичним відображенням з відкритої кулі $B_{\rho_0(\xi)}$ в X з центром в нулі радіуса ρ_0 в $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$, тоді F_ξ є обмеженим на кулі будь-якого меншого радіусу з центром в нулі.*

Доведення. Розглянемо n-ту однорідну компоненту відображення F_ξ:

$$F_{\xi,n} = c_n x^{\otimes n}.$$

Відомо [5], що радіус рівномірної збіжності в нулі (дорівнює радіусу обмеженості в нулі) функції F_ξ можна знайти за формулою:

$$\varrho_0(F_\xi) = \frac{1}{\limsup \|F_{\xi n}\|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\limsup |c_n|^{\frac{1}{n}}} = \rho_0.$$

Тому F_ξ буде аналітичною функцією в околі нуля радіуса ρ_0. □

Зауважимо, що для кожного лінійного неперервного функціоналу $\varphi \in \mathcal{F}'_{\alpha,\gamma}$ композиція $\varphi \circ F_\xi$ буде аналітичною функцією обмеженого типу в кулі $B_{\rho_0(\xi)}$. Позначимо $\Phi_\xi = \{\varphi \circ F_\xi : \varphi \in \mathcal{F}'_{\alpha,\gamma}\}$. Тоді при заданих ξ, α, γ пара $F_\xi, \mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$ задає лінеаризацію функцій з класу Φ_ξ на $B_{\rho_0(\xi)}$. Аналогічно, якщо A — лінійний оператор з $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$ в деякий нормований простір Y, то $A \circ F_\xi$ буде аналітичним відображенням з $B_{\rho_0(\xi)}$ в Y. Відображення F_ξ будемо називати *породжуючою функцією* для класу Φ_ξ.

Приклад 2.1. *Нехай* $\xi(z) = \frac{az+b}{-cz+d} = \frac{az+b}{d(1-\frac{c}{d}z)} = \frac{az+b}{d}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}z^n$ — *дробово-лінійне відображення з* $\mathbb{C}$ *в* $\mathbb{C}$, *визначене в кулі з центром в нулі радіуса* $\frac{d}{c}$, *тоді*

$$F_\xi(x) = \frac{ax+b}{d}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}x^{\otimes n}.$$

Нехай $\varphi \in \mathcal{F}'_{\alpha,\gamma}$, *тоді* $\varphi \circ F_\xi(x) = p + \frac{a\varphi(x)+b}{d}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}\varphi_n(x)$, *де* φ_n — *n-однорідний поліном, що є звуженням* φ *на* $\bigotimes^n_{\gamma,s} X$.

У випадку, коли $\varphi_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} g_k^n(x), \varphi_0(1) = p$, *де* $g \in X'$, $\|g\| \le \frac{d}{c}$, *отримаємо, що*

$$\varphi \circ F_\xi(x) = \frac{ag(x)+b}{d}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}\sum_{k=1}^{p}g_k^n(x) =$$

$$\left(1 + \frac{ag_1(x)+b}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}g_1^n(x)\right) + \left(1 + \frac{ag_2(x)+b}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}g_2^n(x)\right) + \cdots +$$

$$\left(1 + \frac{ag_p(x)+b}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n}{d^n}g_p^n(x)\right) =$$

$$\frac{ag_1(x)+b}{d(1-\frac{c}{d}g_1(x))} + \frac{ag_2(x)+b}{d(1-\frac{c}{d}g_2(x))} + \cdots + \frac{ag_p(x)+b}{d(1-\frac{c}{d}g_p(x))} = \sum_{k=1}^{p}\frac{ag_k(x)+b}{-cg_k(x)+d}.$$

Цей приклад показує, як можна лінеаризувати дробово-лінійні відображення. Зокрема, для випадку $\xi = \frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, $\varphi_n = f^n + g^n$, *де* $f, g \in X'$, $X = \mathbb{C}^2 = \{x = (x_1, x_2) = x_2e_2 + x_2e_2\}$, *отримуємо* $x^{\otimes n} = (x_2e_2 + x_2e_2)^{\otimes n} = \sum\limits_{k=0}^{n} c_n^k x_1^k x_2^{n-k} e_1^{\otimes n} e_2^{\otimes n-k}$, $\|f\| \le 1, \|g\| \le 1$ *і* $\varphi_0(1) = 2$, *тоді*

$$\varphi \circ F_\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty}f^n(x) + \sum_{n=1}^{\infty}g^n(x) = \frac{1}{1-f(x)} + \frac{1}{1-g(x)}.$$

В загальному випадку, клас функцій $\varphi \circ F_\xi$ може бути дуже широким. Наприклад, $X = \mathbb{C}$, $\xi = \frac{1}{1-z}$, α — ℓ_2-норма, γ — стандартна метрика в $\mathbb{C}$. Тоді кожна аналітична функція в одиничному крузі $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, яка належить класу Харді $H^2(\mathbb{D})$, має вигляд $\varphi \circ F_\xi$. Справді, в цьому випадку простір $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$ ізометрично ізоморфний до $H^2(\mathbb{D})$. Кожен лінійний функціонал φ на $H^2(\mathbb{D})$ визначається деякою функцією $f \in H^2(\mathbb{D})$, такою що

$$\varphi(g) = \int_S g(z)\overline{f(z)}dz.$$

Зокрема, $\varphi \circ F_\xi(z) = \int\limits_S \frac{\overline{f(z)}}{1-z}dz = f(z)$ (за формулою Коші).

Якщо у нас визначено дві породжуючі функції F_{ξ_1} та F_{ξ_2}, то за певних умов їх композиція буде породжуючою функцією для деякого класу Φ.

Виберемо простір X, тензорну норму γ та норму α так, щоб

$$\mathcal{F}_{\alpha,\gamma} \otimes_{\gamma,s} \mathcal{F}_{\alpha,\gamma} \subset \mathcal{F}_{\alpha,\gamma}. \tag{6}$$

Для цього достатньо, щоб простір X був ізоморфним до $\otimes^n_{\gamma,s}X$ для довільного n та ізоморфним до $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$. У [9] доведено, що коли X — банахів простір з безумовним базисом, то вказані умови виконуються для деяких α і γ. Зокрема, якщо $X = \ell_1$, то включення (6) виконується, коли γ — проективна тензорна норма і α — ℓ_1-норма на $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$, тобто $\|\sum\omega_n\|_\alpha = \|\sum\omega_n\|_\gamma$, де $\omega_n \in \otimes^n_{\gamma,s}X$. Якщо $X = c_0$, то γ буде ін'єктивною тензорною нормою, а α — c_0-норма на $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$. У випадку, коли $X = \ell_2$, замість γ можна вибрати гільбертову тензорну норму, а α — ℓ_2-норма на $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$. Припустимо, що ξ_1, ξ_2 — функції комплексного аргументу, аналітичні в кулях B_{r_1} і B_{r_2} відповідно. Нехай $r > 0$ — таке число, що $\forall z \in B_{r_2}$ $|z| < r, \xi_2(z) \in B_{r_2}$, тоді $F_{\xi_1} \circ F_{\xi_2}$ є аналітичним відображенням з $B_r \subset X$ в $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$. Оскільки $\xi \mapsto F_\xi$ є лінійним і мультиплікативним, то $F_{\xi_1} \circ F_{\xi_2} = F_{\xi_1 \circ \xi_2}$ буде породжуючою функцією для класу аналітичних функцій $\Phi_{\xi_1 \circ \xi_2}$ на B_{r_1}.

Нехай X — метричний простір з відміченою точкою. Розглянемо простір $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}(B(X))$ для довільних норм α та γ і канонічного вкладення F_ξ. Визначимо клас відображень

$$\Phi_\xi(X, E) = \{A \circ F_\xi \circ \nu | A \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}(B(X)), E)\}.$$

Таким чином, пара $F_\xi \circ \nu$ та $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$ задає лінеаризацію відображень з класу $\Phi_\xi(X, E)$. Будемо називати відображення f з X в E *ліпшицево-аналітичними*, якщо $f \in \Phi_\xi(X, E)$ для деякої аналітичної функції ξ, норм α і γ. У випадку, коли γ — проективна норма, простір $\mathcal{F}_{\alpha,\pi}(B(X))$ буде поповненням формальної суми просторів $\diamond^n_s X$ відносно деякої норми, яка індукується нормою α.

Література

1. Дубей М.В. *Аналог тензорного добутку метричних просторів* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2010. — Вип.501. — С.33–38.
2. Райков Д.А. *Свободные локально выпуклые подпространства равномерных пространств* // Мат. сб. — 1964. — Т.63, № 4. — С. 582–590.
3. Arens R., Eells J. *On embedding uniform and topological spaces*, Pacic J. Math., **6** (1959), 397–403.
4. Benyamini Y., Lindenstrauss J. Geometric nonlinear functional analysis, Providence, Amer. Math. Society, 2000.

5. Dineen S. Complex Analysis on infinite dimensional space, Monographs in mathematics. Springer. New York. 1999.

6. Dubei M., Tymchatyn E. D., Zagorodnyuk A. *Free Banach Spaces and Extension of Lipschitz Maps.* Topology. Elsevier. **48**, 2 (2009). 203–213.

7. Flood J. Free topological vector spaces, Canberra, Australian National university, Ph. D. thesis. 1975.

8. Godefroy G., Kalton N. *Lipschitz-free Banach spaces*, Studia Math., **159**, 1 (2003), 121–141.

9. Lopushansky O.V., Zagorodnyuk A.V. *Hilbert spaces of analytic functions of infinitely many variables*, Annales pol. mathem., **81**, 2 (2003), 111–122.

10. Pestov V. *Free Banach spaces and representation of topological groups*, Func. Anal. Appl., **20** (1986), 70–72.

11. Weaver N. Lipschitz algebras, Singapore, New Jersey, London, New York, World Scientific, 1999.

Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України,
Львів, Україна

Надійшло 04.04.2011

Dubei M.V., Zagorodnyuk A.V. *Linearization of Lipschitz-polynomial and Lipschitz-analytic mappings*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 40–48.

We introduce and study Lipschitz-analytic and Lipcshitz-polynomial functions, analogues of tensor and symmetric tensor products of metric spaces. Using the analogues of tensor products of metric spaces and linearizations of analytic functions we construct a global linearization of Lipschitz-polynomial and Lipschitz-analytic maps.

Дубей М.В., Загороднюк А.В. *Линеаризация липшицово-полиномиальных и липшицово-аналитических функций* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 40–48.

В статье вводится понятие липшицово-полиномиальных и липшицово-аналитических функций, аналоги тензорного и симметрического тензорного произведения метрических пространств. Используя аналоги тензорного произведения метрических пространств и процесс линеаризации аналитических функций, осуществляется глобальная линеаризация липшицево-полиномиальных и липшицево-аналитических отображений.

Карпатські математичні публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №1

УДК 512.64

Заторський Р.А.

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ МАТРИЦЬ ХЕССЕНБЕРГА

Заторський Р.А. *Дослідження функцій матриць Хессенберга* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 49–55.

В роботі вивчаються зв'язки функцій матриць Хессенберга із парадетермінантами та параперманентами.

Вступ

Важливим класом квадратних матриць є матриці Хессенберга [6]. Вони виникають у підпросторах Крилова[1] [3] в процесі побудови ортогональних базисів, у задачах на знаходження власних значень матриці QR-методом (методом послідовних елементарних перетворень), а також у теорії симетричних многочленів — у детермінантних виразах симетричних многочленів [4]. Виявляється, що детермінанти матриць Хессенберга можна подати у вигляді парадетермінантів трикутних матриць, властивості яких добре вивчені. Позаяк квазітрикутні матриці [2] є частковим випадком матриць Хессенберга, то зв'язок останніх з парадетермінантами дозволяє узагальнити ряд теорем числення трикутних матриць, зокрема теорему Пойа [8], [7] про зв'язок перманентів із детермінантами.

Матриці Хессенберга з'являються також при дослідженні характеру та швидкості збіжності раціональних вкорочень рекурентних дробів.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 15A15.
Ключові слова і фрази: матриці Хессенберга, параперманент, парадетермінант.

[1]Підпростором Крилова розмірності m породженим вектором $v \in C^n$ і квадратною матрицею $A \in C^n \times C^n$ називають лінійний простір

$$K_m(v, A) = span\{v, Av, A^2v, \ldots, A^{m-1}v\}.$$

1 Зведення матриць Хессенберга до парадетермінантів та параперманентів трикутних матриць

Теорема 1. *Справедливою буде тотожність*

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
a_{21} & a_{22} & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots\\
a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \dots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2} & 0\\
a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1}\\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \left\langle
\begin{array}{lllllll}
a_{11} & & & & & & \\
a_1\cdot\frac{a_{21}}{a_{22}} & a_{22} & & & & & \\
a_1\cdot\frac{a_{31}}{a_{32}} & a_2\cdot\frac{a_{32}}{a_{33}} & a_{33} & & & & \\
\vdots & \dots & \dots & \ddots & & & \\
a_1\cdot\frac{a_{n-2,1}}{a_{n-2,2}} & a_2\cdot\frac{a_{n-2,2}}{a_{n-2,3}} & a_3\cdot\frac{a_{n-2,3}}{a_{n-2,4}} & \dots & a_{n-2,n-2} & & \\
a_1\cdot\frac{a_{n-1,1}}{a_{n-1,2}} & a_2\cdot\frac{a_{n-1,2}}{a_{n-1,3}} & a_3\cdot\frac{a_{n-1,3}}{a_{n-1,4}} & \dots & a_{n-2}\cdot\frac{a_{n-1,n-2}}{a_{n-1,n-1}} & a_{n-1,n-1} & \\
a_1\cdot\frac{a_{n1}}{a_{n2}} & a_2\cdot\frac{a_{n2}}{a_{n3}} & a_3\cdot\frac{a_{n3}}{a_{n4}} & \dots & a_{n-2}\cdot\frac{a_{n,n-2}}{a_{n,n-1}} & a_{n-1}\cdot\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & a_{nn}
\end{array}
\right\rangle. \qquad (1)
$$

Доведення. Перемножимо детермінант лівої частини тотожності (1) на $\prod_{i=1}^{n-1} a_i$ та розділимо j-тий ($j = 2, 3, \dots, n$) стовпець детермінанта лівої частини тотожності на a_{j-1}. При цьому отримаємо детермінант квазітрикутної матриці, з якої, при допомозі наслідку 1 [2], легко одержати парадетермінант правої частини тотожності (1). □

Теорема 2. *Справедливою є тотожність*

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
a_{21} & a_{22} & -a_2 & \dots & 0 & 0 & 0\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots\\
a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \dots & a_{n-2,n-2} & -a_{n-2} & 0\\
a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & -a_{n-1}\\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \left[
\begin{array}{lllllll}
a_{11} & & & & & & \\
a_1\cdot\frac{a_{21}}{a_{22}} & a_{22} & & & & & \\
a_1\cdot\frac{a_{31}}{a_{32}} & a_2\cdot\frac{a_{32}}{a_{33}} & a_{33} & & & & \\
\vdots & \dots & \dots & \ddots & & & \\
a_1\cdot\frac{a_{n-2,1}}{a_{n-2,2}} & a_2\cdot\frac{a_{n-2,2}}{a_{n-2,3}} & a_3\cdot\frac{a_{n-2,3}}{a_{n-2,4}} & \dots & a_{n-2,n-2} & & \\
a_1\cdot\frac{a_{n-1,1}}{a_{n-1,2}} & a_2\cdot\frac{a_{n-1,2}}{a_{n-1,3}} & a_3\cdot\frac{a_{n-1,3}}{a_{n-1,4}} & \dots & a_{n-2}\cdot\frac{a_{n-1,n-2}}{a_{n-1,n-1}} & a_{n-1,n-1} & \\
a_1\cdot\frac{a_{n1}}{a_{n2}} & a_2\cdot\frac{a_{n2}}{a_{n3}} & a_3\cdot\frac{a_{n3}}{a_{n4}} & \dots & a_{n-2}\cdot\frac{a_{n,n-2}}{a_{n,n-1}} & a_{n-1}\cdot\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & a_{nn}
\end{array}
\right]. \qquad (2)
$$

Доведення. Спочатку скористаємося теоремою 1 і переходимо від детермінанта лівої частини тотожності (2) до відповідного парадетермінанта. Потім, використовуючи теорему про зв'язок параперманента з парадетермінантом, від отриманого парадетермінанта переходимо до параперманента правої частини тотожності (2). □

Зауваження 1.1. *Теорема 1 узагальнює теорему про зв'язок детермінанта із парадетермінантом із [2] та теорему про зв'язок перманентів із детермінантами [5].*

Приклад 1. *Нехай*

$$\sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1<i_2<\dots<i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k},$$

$$s_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k,$$

$$p_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$$

є відповідно елементарні симетричні многочлени, степеневі суми та повні однорідні симетричні многочлени, тоді справедливі [4] детермінантні представлення елементарних симетричних многочленів та повних однорідних симетричних многочленів через степеневі суми:

$$
\sigma_k = \frac{1}{k!}
\begin{vmatrix}
s_1 & 1 & 0 & \dots & 0\\
s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0\\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots\\
s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \dots & k-1\\
s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & s_1
\end{vmatrix},
\quad
p_k = \frac{1}{k!}
\begin{vmatrix}
s_1 & -1 & 0 & \dots & 0\\
s_2 & s_1 & -2 & \dots & 0\\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots\\
s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \dots & -(k-1)\\
s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & s_1
\end{vmatrix}.
$$

Тоді, внаслідок теорем 1, 2, їх можна виразити відповідно через парадетермінант та параперманент трикутної матриці

$$
A = \begin{pmatrix}
s_1 & & & & \\
1\cdot\frac{s_2}{s_1} & s_1 & & & \\
1\cdot\frac{s_3}{s_2} & 2\cdot\frac{s_2}{s_1} & s_1 & & \\
\vdots & \dots & \dots & \ddots & \\
1\cdot\frac{s_k}{s_{k-1}} & 2\cdot\frac{s_{k-1}}{s_{k-2}} & 3\cdot\frac{s_{k-2}}{s_{k-3}} & \dots & s_1
\end{pmatrix},
$$

причому справедливими будуть тотожності:

$$\sigma_k = \frac{1}{k!}\mathrm{ddet}(A), \quad p_k = \frac{1}{k!}\mathrm{pper}(A).$$

Останні тотожності дозволяють перейти до відповідних рекурентних співвідношень. Для цього достатньо розкласти парадетермінант та параперманент матриці A за елементами останнього рядка.

2 Деякі теореми числення матриць

Доведемо дві теореми, які використовуються при дослідженні характеру та швидкості збіжності раціональних вкорочень рекурентних дробів та мають деяке відношення до матриць Хессенберга.

Нехай задана трикутна матриця

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \dots & \ddots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \dots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} \\ a_{m+2,1} & a_{m+2,2} & \dots & a_{m+2,m} & a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & a_{n,m+1} & a_{n,m+2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_n, \tag{3}$$

тоді ріг

$$R_{m1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \dots & \ddots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

цієї матриці природно позначити через A_m. На основі рогу

$$R_{n,m+1} = \begin{pmatrix} a_{m+1,m+1} \\ a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} \\ \vdots & \dots & \ddots \\ a_{n,m+1} & a_{n,m+2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

побудуємо матриці

$$B_j = \begin{pmatrix} b_{j1} \\ b_{j2} & a_{m+2,m+2} \\ \vdots & \dots & \ddots \\ b_{j,n-m} & a_{n,m+2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

де

$$b_{ji} = \prod_{k=j}^{m+1} a_{m+i,k}, \quad i = 1,2,\dots,n-m, \quad j = 1,2,\dots,m+1. \tag{4}$$

Теорема 1. *Для матриці (3) виконуються тотожності*

$$\operatorname{pper}(A_n) = \sum_{r=0}^{m} \operatorname{pper}(A_r) \cdot \operatorname{pper}(B_{r+1}), \tag{5}$$

$$\operatorname{ddet}(A_n) = \sum_{r=0}^{m} (-1)^{m-r} \operatorname{ddet}(A_r) \cdot \operatorname{ddet}(B_{r+1}). \tag{6}$$

Доведення. Доведемо тотожність (5).

1. Доведемо, що число доданків лівої частини тотожності рівне числу доданків правої. Число доданків лівої частини дорівнює числу впорядкованих розбиттів натурального числа n на натуральні доданки і дорівнює 2^{n-1}. Знайдемо число доданків правої частини тотожності. Число доданків кожного із параперманентів B_j, $j = 1,2,\dots,m+1$, становить 2^{n-m-1}, тому маємо суму

$$2^{n-m-1}\left(1 + \sum_{r=1}^{m} 2^{r-1}\right) = 2^{n-m-1}(1 + 2^m - 1) = 2^{n-1}.$$

2. Доведемо, що всі доданки правої частини тотожності побудовані з елементів, які утворюють нормальні набори елементів матриці параперманента з лівої частини тотожності. З цією метою дослідимо доданки, що утворюються в результаті добутку параперманентів $A_r B_{r+1}$, $r = 0,1,\dots,m$.

a) Кожен доданок добутку матиме n різних співмножників, що є елементами матриці параперманента A_n, бо параперманент A_r має порядок r, а в кожен доданок параперманента B_{r+1} входитиме $n-(r+1)-1 = n-r$ співмножників.

b) Кожен доданок добутку, внаслідок задання елементів b_{ji} рівністю (4), можна подати у вигляді факторіальних добутків ключових елементів параперманента A_n.

3. Доведемо, що всі доданки добутку різні, а це випливає із того, що перші стовпці параперманентів B_{r+1}, $r = 0,1,\dots,m$, різні.

Доведемо тотожність (6).

Перш за все відзначимо, що знак нормального набору ключових елементів матриці n-го порядку залежить від парності числа $n-k$, де k — число ключових елементів цього набору. Знайдемо суму порядків парадетермінантів матриць A_r і B_{r+1}. Параперманент матриці B_{r+1} при довільному $r = 0,1,\dots,m$ має порядок $n-m$, а парадетермінант матриці A_r — порядок r, тому сума порядків парадетермінантів цих матриць дорівнює $n+r-m$. Парадетермінант матриці A_n має порядок n.

Розглянемо деякий фіксований нормальний набір k ключових елементів матриці A_n, до складу якого входить факторіальний добуток $\{a_{sr}\}$, $r < m \leqslant s \leqslant n$. Алгебраїчним доповненням до цього факторіального добутку у матриці A_n є добуток парадетермінанта A_r на парадетермінант рогу $R_{n,s+1}$. Алгебраїчним доповненням до факторіального добутку елемента $\{a_{sr} \cdot \ldots \cdot a_{s,m+1}\}$ у парадетермінанті B_{r+1} є парадетермінант рогу $R_{n,s+1}$. Таким чином, зрівнявши знак $(-1)^{n-k}$ фіксованого нормального набору парадетермінанта матриці A_n із знаком $(-1)^{n+r-m-k}$ того ж набору елементів у добутку $\operatorname{ddet} A_r \cdot \operatorname{ddet} B_{r+1}$, прийдемо до рівності $(-1)^{n-k} = (-1)^{n+r-m-k}$. Після відповідного скорочення приходимо до висновку, що добуток $\operatorname{ddet} A_r \cdot \operatorname{ddet} B_{r+1}$ правої частини рівності (6) має знак $(-1)^{m-r}$. □

Наслідок 1. *Справедливими будуть тотожності*

$$\mathrm{pper}(A_n) = \sum_{r=0}^{m} \mathrm{pper}(A_r) \sum_{i=1}^{n-m} \prod_{k=r+1}^{m+1} a_{m+i,k}\mathrm{pper}(R_{n,m+i+1}),$$

$$\mathrm{ddet}(A_n) = \sum_{r=0}^{m} (-1)^{m-r}\mathrm{ddet}(A_r) \sum_{i=1}^{n-m} \prod_{k=r+1}^{m+1} a_{m+i,k}\mathrm{ddet}(R_{n,m+i+1}),$$

де $R_{n,m+i+1}$ *— ріг матриці* A_n.

Нехай задано квадратну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{10} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{11} & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n-1,n-2} & a_{n-2,n-2} & a_{n-3,n-2} & \dots & a_{1,n-2} & -1 & 0 \\ a_{n,n-1} & a_{n-1,n-1} & a_{n-2,n-1} & \dots & a_{2,n-1} & a_{1,n-1} & -1 \\ a_{n+1,n} & a_{n,n} & a_{n-1,n} & \dots & a_{3n} & a_{2n} & a_{1n} \end{pmatrix}_{n+1}.$$

Позначимо детермінант матриці утвореної видаленням із матриці A першого рядка та k-го стовпця (нумерація стовпців ведеться від нульового до n-го) через $A_{k,n}$.

Теорема 2. *Справедливе рекурентне співвідношення*

$$A_{k,n} = -a_{1,k-1}A_{k-1,n} + a_{2,k-1}A_{k-2,n} - \ldots + (-1)^{k-1}a_{k-1,k-1}A_{1,n} + (-1)^{k}a_{k,k-1}A_{0,n}. \quad (7)$$

Доведення. Позаяк у детермінанті лівої частини співвідношення (7) внаслідок видалення k-го стовпця відсутні елементи $a_{1,k}, \ldots, a_{n-k+1,n}$, то у детермінантах правої частини цього співвідношення ці елементи можна замінити нулями. Розкладаючи всі утворені детермінанти правої частини співвідношення за елементами k-го стовпця, отримаємо розклад детермінанта лівої частини цього співвідношення за елементами k-го рядка. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Заторський Р.А. *Про паравизначники і парапермаменти трикутних матриць* // Математичні студії. – 2002. – Т.17, №1. – С. 3–17.
2. Заторський Р.А., Ліщинський І.І. *Про зв'язок детермінантів з парадетермінантами* // Математичні студії. – 2006. – Т. 25. № 1. – С. 97–102.
3. Крылов А.Н. *О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем* // Известия АН СССР, VII серия. Отд. математ. и естеств. наук. – 1931. – № 4. – С. 491–539.
4. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. – М.: Наука, 2008. – 536 с.

5. Тараканов В.Е., Заторский Р.А. *О связи детерминантов с перманентами* // Матем. заметки. – 2009. – Т.85, №2. – С. 292–299.
6. Hessenberg K. Thesis. Dartmstadt, Germany, Technische Hochschule, 1942.
7. Marcus M., Minc H. *On the relation between the determinant and the permanent*, Illinois J. Math., **5** (1961), 376–381.
8. Polya G., Aufgabe 424, Arch. Math. Phys., **20** (1913), 271.

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна
e-mail: *romazz@rambler.ru*

Надійшло 28.02.2011

Zatorsky R.A. *Researching of Hessenberg's matrix functions*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 49–55.

In this work we research the connections of Hessenberg's matrix functions with paradeterminants and parapermanents.

Заторский Р.А. *Исследование функций матриц Хессенберга* // Карпатские математические публикации. – 2011. – Т.3, №1. – С. 49–55.

В работе изучаются связи функций матриц Хессенберга с парадетерминантами и параперманентами.

Карпатські математичні публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №1

УДК 517.98

Kachanovsky N.A.

CLARK-OCONE TYPE FORMULAS IN THE MEIXNER WHITE NOISE ANALYSIS

Kachanovsky N.A. *Clark-Ocone type formulas in the Meixner white noise analysis*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 56–72.

In the classical Gaussian analysis the Clark-Ocone formula allows to reconstruct an integrand if we know the Itô stochastic integral. This formula can be written in the form

$$F = \mathbf{E}F + \int \mathbf{E}\{\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\}dW_t,$$

where a function (a random variable) F is square integrable with respect to the Gaussian measure and differentiable by Hida; $\mathbf{E}$ — the expectation; $\mathbf{E}\{\circ|_{\mathcal{F}_t}\}$ — the conditional expectation with respect to a full σ-algebra $\mathcal{F}_t$ that is generated by the Wiener process W up to the point of time t; ∂F — the Hida derivative of F; $\int \circ(t)dW_t$ — the Itô stochastic integral with respect to the Wiener process.

In this paper we explain how to reconstruct an integrand in the case when instead of the Gaussian measure one considers the so-called generalized Meixner measure μ (depending on parameters, μ can be the Gaussian, Poissonian, Gamma measure etc.) and obtain corresponding Clark-Ocone type formulas.

Introduction

Denote by $\mathcal{D}$ the Schwartz space of infinite-differentiable real-valued functions on $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ with compact supports; by $\mathcal{D}'$ the distribution space that is dual of $\mathcal{D}$; by $\langle\cdot,\cdot\rangle$ the pairing between elements of $\mathcal{D}'$ and $\mathcal{D}$, this pairing is generated by the scalar product in the space of square integrable with respect to the Lebesgue measure functions on $\mathbb{R}_+$; by the subindex $\mathbb{C}$ complexifications of spaces. The notation $\langle\cdot,\cdot\rangle$ will be preserved for pairing in tensor powers and complexifications of spaces.

Let μ be the standard Gaussian measure on $(\mathcal{D}', C(\mathcal{D}'))$ (here and below $C(\mathcal{D}')$ is the σ-algebra on $\mathcal{D}'$ that is generated by cylindrical sets), i.e., a probability measure with the Laplace transform

$$l_\mu(\lambda) = \int_{\mathcal{D}'} e^{\langle x,\lambda\rangle}\mu(dx) = e^{\langle\lambda,\lambda\rangle/2}, \quad \lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}.$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 47B99, 60H05.
Key words and phrases: generalized Meixner measure, Meixner process, Clark-Ocone formula.

As it is well known (e.g., [6, 25, 21]), any square integrable with respect to μ and differentiable by Hida complex-valued function F on $\mathcal{D}'$ can be presented in the form

$$F = \mathbf{E}F + \int \mathbf{E}\{\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\}dW_t, \tag{1}$$

where $\mathbf{E}$ is the expectation and $\mathbf{E}\{\circ|_{\mathcal{F}_t}\}$ is the conditional expectation with respect to a full σ-algebra $\mathcal{F}_t$ that is generated by the Wiener process W up to the point of time t, i.e., $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : s \le t)$; $\partial.F$ — the Hida derivative of F and $\int\circ(t)dW_t$ — the Itô stochastic integral with respect to W (usually for stochastic integrals on $\mathbb{R}_+$ we do not write limits of integration for simplification of notations). Formula (1) is called the *Clark-Ocone formula*. As we can see, this formula allows us to reconstruct a version of the integrand (this integrand is not unique, generally speaking) if we know the result of stochastic integration.

As it is known (e.g., [8, 30]), formula (1) holds true (up to clear modifications) if instead of the Gaussian measure one considers the Poissonian one. Moreover, one can easily avoid a restrictive assumption that F must be differentiable by Hida: it is sufficient to generalize the Clark-Ocone formula to spaces of generalized functions (see, e.g., [7, 9]).

Clark-Ocone formulas and their generalizations (in this paper they will be called *Clark-Ocone type formulas*) have applications in the stochastic analysis and in the financial mathematics, see, e.g., [18, 4, 9, 23, 10, 26, 22, 12, 8, 30] and references therein. In order to satisfy demands of applications (for example, in some problems it is necessary to reconstruct an integrand by the result of integration, in another problems it is necessary to recontsruct a random variable by the family of conditional expectations of its stochastic derivative, etc.), different variants of such formulas on various spaces, with different stochastic derivatives and with stochastic integrals with respect to various random processes and measures were obtained, see, in particular, [19, 21, 4, 7, 5, 20, 9, 22, 30, 8]. For example, in [21, 20] a Clark-Ocone type formula that is connected with Lévy processes was obtained, this formula contains stochastic integrals with respect to a Wiener process and with respect to a compensated Poissonian random measure. In [9] an another way of construction of Clark-Ocone type formulas that are connected with Lévy processes was offered, this way is based on the Nualart-Schoutens representation for a square integrable random variable [24, 28]; now the Clark-Ocone type formulas contain integrals with respect to special random processes. Moreover, these formulas were obtained in [9] not only for square integrable random variables, but also for generalized ones.

In this paper we obtain Clark-Ocone type formulas in the so-called Meixner white noise analysis. This analysis is connected with the generalized Meixner measure μ [27] (see also Subsection 1.1) which, depending on parameters, can be the Gaussian, Poissonian, Gamma measure etc., and with the corresponding Meixner random process M (the derivative of which is the Meixner white noise that is connected with μ). Note that under some assumptions (see Subsection 1.3) M is a Lévy process. Nevertheless, our constructions essentially differ from the constructions of [21, 20] and [9]: we try to preserve a "classical" form of Clark-Ocone type formulas and therefore exploit a Hida stochastic derivative and stochastic integrals with respect to M only. Of course, in the particular cases when μ is the Gaussian or Poissonian measure, our formulas reduce to the corresponding classical Clark-Ocone formulas.

The paper is organized in the following manner. In the first section we recall necessary definitions and results (the generalized Meixner measure, properties of the corresponding space of square integrable functions, the extended (Skorohod) stochastic integral, the Hida stochastic derivative, properties of these operators). In the second section we deal with Clark-Ocone type formulas and related matters. Note that here we obtain these formulas on the space of square integrable with respect to the generalized Meixner measure functions only, the case of spaces of generalized functions will be considered in another paper.

1 PRELIMINARIES

1.1 The generalized Meixner measure

Let us define the generalized Meixner measure (see [27] for more details and explanations). Let $\rho, \nu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ be smooth functions such that

$$\theta \stackrel{def}{=} \rho - \nu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad \eta \stackrel{def}{=} \rho\nu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \tag{2}$$

and, moreover, θ and η are bounded on $\mathbb{R}_+$. Further, for each $t \in \mathbb{R}_+$ let $v_{\rho(t),\nu(t)}(ds)$ be a probability measure on $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (here $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ is the Borel σ-algebra on $\mathbb{R}$) which is defined by its Fourier transform

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\zeta s} v_{\rho(t),\nu(t)}(ds) = \exp\Big\{ -i\zeta\big(\rho(t)+\nu(t)\big)+ 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\big(\rho(t)\nu(t)\big)^m}{m}\Big[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-i\zeta)^n}{n!}(\nu^{n-2}(t)+\nu^{n-3}(t)\rho(t)+\dots+\rho^{n-2}(t))\Big]^m\Big\}.$$

Definition. *A probability measure μ on the measurable space $(\mathcal{D}', C(\mathcal{D}'))$ with the Fourier transform*

$$\int_{\mathcal{D}'} e^{i\langle x,\xi\rangle}\mu(dx) = \exp\Big\{\int_{\mathbb{R}_+} dt \int_{\mathbb{R}} v_{\rho(t),\nu(t)}(ds)\frac{1}{s^2}\big(e^{is\xi(t)} - 1 - is\xi(t)\big)\Big\}$$

is called the generalized Meixner measure.

Depending on parameters ρ and ν, μ we can get, in particular, the Gaussian, Poissonian, Pascal, Meixner or Gamma measure.

It was proved in [27] that the generalized Meixner measure μ is the measure of a generalized random process [11] with independent values; and the Laplace transform $l_\mu(\cdot) = \int_{\mathcal{D}'}\exp\{\langle x,\cdot\rangle\}\mu(dx)$ of μ is a holomorphic at $0 \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ function.

1.2 The space of square integrable functions

Let $(L^2) := L^2(\mathcal{D}', \mu)$ be the space of complex-valued square integrable with respect to the generalized Meixner measure μ functions on $\mathcal{D}'$. We construct now a natural orthogonal basis in (L^2). For $n \in \mathbb{N}$ denote by $\overline{\mathcal{P}}_n$ the closure in (L^2) of the set of all continuous polynomials on $\mathcal{D}'$ of degree $\le n$, $\overline{\mathcal{P}}_0 := \mathbb{C}$. Denote also $(L^2_n) := \overline{\mathcal{P}}_n \ominus \overline{\mathcal{P}}_{n-1}$ (the orthogonal

complemention in (L^2)), $(L^2_0) := \mathbb{C}$. Since μ has a holomorphic at zero Laplace transform, the set of continuous polynomials on $\mathcal{D}'$ is dense in (L^2) [29], therefore $(L^2) = \mathop{\oplus}\limits_{n=0}^{\infty}(L^2_n)$.

Denote by $\widehat{\otimes}$ a symmetric tensor product. For each $f^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes}n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ ($\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes}0} := \mathbb{C}$), we define $:\langle x^{\otimes n}, f^{(n)}\rangle:$ as the orthogonal projection of $\langle x^{\otimes n}, f^{(n)}\rangle$ onto (L^2_n), $x \in \mathcal{D}'$. It follows from results of [27] that $:\langle x^{\otimes n}, f^{(n)}\rangle: = \langle P_n(x), f^{(n)}\rangle$, where $P_n(x) \in \mathcal{D}'^{\widehat{\otimes}n}$ are the kernels of (generalized Appell) polynomials with a generating function $\gamma(\lambda)\exp\{\langle x, \alpha(\lambda)\rangle\}$, $\lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$, i.e.,

$$\gamma(\lambda)\exp\{\langle x,\alpha(\lambda)\rangle\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle P_n(x), \lambda^{\times n}\rangle,$$

where $\alpha(\lambda) = \lambda + \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}(\rho^{n-1}+\rho^{n-2}\nu+\dots+\nu^{n-1})$ and

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{l_\mu(\alpha(\lambda))} = \exp\Big\{-\int_{\mathbb{R}_+}\Big(\frac{\lambda^2(t)}{2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\lambda^n(t)}{n}\big(\rho^{n-2}(t)+\rho^{n-3}(t)\nu(t)+\dots+\nu^{n-2}(t)\big)\Big)dt\Big\}.$$

Let us define (*real*, i.e., *bilinear*) scalar products $\langle\cdot,\cdot\rangle_{ext}$ on $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes}n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, by setting for $f^{(n)}, g^{(n)} \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes}n}$

$$\langle f^{(n)}, g^{(n)}\rangle_{ext} := \frac{1}{n!}\int_{\mathcal{D}'}\langle P_n(x), f^{(n)}\rangle\langle P_n(x), g^{(n)}\rangle\mu(dx).$$

It follows from results of [27] that

$$\begin{aligned}\langle f^{(n)}, g^{(n)}\rangle_{ext} = &\sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>l_2>\dots>l_k,\\ l_1s_1+\dots+l_ks_k=n}}\frac{n!}{l_1^{s_1}\dots l_k^{s_k}s_1!\dots s_k!}\times\\ &\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}} f^{(n)}(\underbrace{t_1,\dots,t_1}_{l_1},\dots,\underbrace{t_{s_1},\dots,t_{s_1}}_{l_1},\dots,\underbrace{t_{s_1+\dots+s_k},\dots,t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})\times\\ &g^{(n)}(\underbrace{t_1,\dots,t_1}_{l_1},\dots,\underbrace{t_{s_1},\dots,t_{s_1}}_{l_1},\dots,\underbrace{t_{s_1+\dots+s_k},\dots,t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})\eta^{l_1-1}(t_1)\dots\eta^{l_1-1}(t_{s_1})\times\\ &\eta^{l_2-1}(t_{s_1+1})\dots\eta^{l_2-1}(t_{s_1+s_2})\dots\eta^{l_k-1}(t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1})\dots\eta^{l_k-1}(t_{s_1+\dots+s_k})\,dt_1\dots dt_{s_1+\dots+s_k}.\end{aligned} \tag{3}$$

So, for example, for $n = 1$ $\langle f^{(1)}, g^{(1)}\rangle_{ext} = \langle f^{(1)}, g^{(1)}\rangle = \int_{\mathbb{R}_+} f^{(1)}(t)g^{(1)}(t)dt$, for $n = 2$ $\langle f^{(2)}, g^{(2)}\rangle_{ext} = \langle f^{(2)}, g^{(2)}\rangle + \int_{\mathbb{R}_+} f^{(2)}(t,t)g^{(2)}(t,t)\eta(t)dt$. If (see (2)) $\eta = 0$ (the case of Gaussian or Poissonian μ) then $\langle f^{(n)}, g^{(n)}\rangle_{ext} = \langle f^{(n)}, g^{(n)}\rangle$, in the general case $\langle f^{(n)}, g^{(n)}\rangle_{ext} = \langle f^{(n)}, g^{(n)}\rangle + \dots$.

Let $|\cdot|_{ext}$ denotes the norm which is generated by the scalar product $\langle\cdot,\cdot\rangle_{ext}$, i.e., for $n \in \mathbb{Z}_+$ $|f^{(n)}|_{ext} := \sqrt{\langle f^{(n)}, \overline{f^{(n)}}\rangle_{ext}}$. Denote by $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ the Hilbert space which is the closure of $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes}n}$ with respect to $|\cdot|_{ext}$ (in particular, $\mathcal{H}_{ext}^{(0)} = \mathbb{C}$).

Let $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}_+)$ be the space of complex-valued square integrable with respect to the Lebesgue measure functions on $\mathbb{R}_+$. It is clear that $\mathcal{H}_{ext}^{(1)} = \mathcal{H}$. For $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ the space $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ can be understood as an extension of $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}$ in a generalized sense: let $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}$, $f^{(n)} \in F^{(n)}$ be a representative (a function) from the equivalence class $F^{(n)}$ with a "zero diagonal", i.e., $f^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) = 0$ if there exist $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ such that $i \neq j$ but $t_i = t_j$. It is easy to show ([16]), that the function $f^{(n)}$ generates an equivalence class in $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ which can be identified with $F^{(n)}$.

Note that, of course, the space $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ depends on the parametric function η, see (2) (for example, if $\eta = 0$ then $\mathcal{H}_{ext}^{(n)} = \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n}$), but we do not use η in the designation of this space for simplification of notation.

For $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, we define a polynomial $\langle P_n, F^{(n)} \rangle \in (L^2)$ as

$$\langle P_n, F^{(n)} \rangle := (L^2)\text{-}\lim_{k\to\infty} \langle P_n, f_k^{(n)} \rangle,$$

where $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n} \ni f_k^{(n)} \to F^{(n)}$ in $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ as $k \to \infty$ (this difinition is well-posed, as is easy to verify). The forthcoming statement easily follows from the construction of polynomials $\langle P_n, F^{(n)} \rangle$ (see also [27]).

Theorem. *A function $F \in (L^2)$ if and only if there exists a sequence of kernels*

$$\left(F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$$

such that F can be presented in the form

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n, F^{(n)} \rangle, \tag{4}$$

where the series converges in (L^2), i.e., the (L^2)-norm of F

$$\|F\|_{(L^2)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |F^{(n)}|_{ext}^2 < \infty. \tag{5}$$

Moreover, the system $\left\{\langle P_n, F^{(n)} \rangle,\ F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)},\ n \in \mathbb{Z}_+\right\}$ is an orthogonal basis in (L^2) in the sense that for $F, G \in (L^2)$ of form (4) the (real) scalar product in (L^2)

$$(F, G)_{(L^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} n! \langle F^{(n)}, G^{(n)} \rangle_{ext}.$$

1.3 The extended stochastic integral

By analogy with the Gaussian analysis, on the probability triplet $(\mathcal{D}', C(\mathcal{D}'), \mu)$ we define the Meixner random process M by setting for each $t \in \mathbb{R}_+$ $M_t := \langle P_1, 1_{[0,t)} \rangle \in (L^2)$, here and below $1_B(y)$ is the indicator of the event $\{y \in B\}$.

Remark. *If the parametric functions ρ and ν (see Subsection 1.1) are constants then M is a Lévy process; but, in general, it is not the case (M can be a not time-homogeneous process).*

Using results of [27] one can show that M *is a locally square integrable normal martingale (with respect to the generated by M flow of full σ-algebras) with orthogonal independent increments*, therefore one can consider the Itô stochastic integral with respect to M.

Let us recall the construction of the extended (Skorohod) stochastic integral with respect to M (see [16] for details). Let $G \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$. It follows from above-posed results that G can be presented in the form

$$G(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n, G_{\cdot}^{(n)} \rangle, \tag{6}$$

$G_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}$, with $\|G\|_{(L^2)\otimes\mathcal{H}}^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n! |G_{\cdot}^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}}^2 < \infty$.

If in addition G is such that the kernels $G_{\cdot}^{(n)}$ belong to $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n} \otimes \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}$ (the embedding in the generalized sense described above) then one can show [16] that F can be presented in the form

$$G(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \int_0^{\infty} \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} G_{\cdot}^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) dM_{t_1} \ldots dM_{t_n}, \tag{7}$$

i.e., as a series of repeated Itô stochastic integrals with respect to the Meixner process. In this case one can define the extended stochastic integral of G with respect to M as

$$\begin{aligned}\int G(t)\widehat{d}M_t &:= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! \int_0^{\infty} \int_0^{t} \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} \widehat{G}^{(n)}(t_1, \ldots, t_n, t) dM_{t_1} \ldots dM_{t_n} dM_t = \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \langle P_{n+1}, \widehat{G}^{(n)} \rangle \in (L^2)\end{aligned} \tag{8}$$

(cf. [2, 3, 1]), where $\widehat{G}^{(n)} \in \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n+1} \subset \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$ are the projections of $G_{\cdot}^{(n)}$ onto $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n+1}$, if this series converges in (L^2). Note that if in addition G is integrable by Itô then series (8) is the result of term by term integration of series (7), the convergence of (8) in (L^2) follows in this case from the condition $G \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$.

For a general $G \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$ the above mentioned definition cannot be accepted because it is impossible to project elements of $\mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}$ onto $\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$, generally speaking. Nevertheless, the following natural generalization is possible. Let $G_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}$. We select a representative (a function) $g_{\cdot}^{(n)} \in G_{\cdot}^{(n)}$ with the property $g_t^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) = 0$ if there exists $j \in \{1, \ldots, n\}$ such that $t_j = t$. Let us define the element $\widehat{G}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$ as the equivalence class in $\mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$ that is generated by the symmetrization of $g_{\cdot}^{(n)}$ with respect to $n+1$ variables (note that for $n = 0$ we have $\mathcal{H}_{ext}^{(0)} \otimes \mathcal{H} = \mathcal{H} \ni G_{\cdot}^{(0)} = \widehat{G}^{(0)} \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_{ext}^{(1)}$). It was proved in [16] that $\widehat{G}^{(n)}$ is well-defined and $|\widehat{G}^{(n)}|_{ext} \leq |G_{\cdot}^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}}$.

Definition. *Let $G \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$ and be such that $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)! |\widehat{G}^{(n)}|_{ext}^2 < \infty$, where the elements $\widehat{G}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n+1)}$ were constructed above by the kernels $G_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}$ from decomposition (6) for G. We define the extended stochastic integral with respect to M $\int G(t)\widehat{d}M_t \in (L^2)$ by setting*

$$\int G(t)\widehat{d}M_t := \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_{n+1}, \widehat{G}^{(n)} \rangle.$$

In particular cases, when the generalized Meixner measure μ is the Gaussian or Poissonian one, the operator $\int \circ(t)\widehat{d}M_t$ is the classical extended Skorohod stochastic integral [2, 3, 1]. The forthcoming statement explains why we preserve this term in a general case.

Theorem. *([16]) Let $G \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$ and be integrable by Itô with respect to M (i.e., be adapted with respect to the generated by M flow of σ-algebras). Then G is integrable in the extended sense, and $\int G(t)\widehat{d}M_t = \int G(t)dM_t$ (the last integral is the Itô one).*

1.4 The Hida stochastic derivative

Finally, let us recall the notion of the Hida stochastic derivative in the Meixner white noise analysis (see [14, 15] for more details). First we note that, as it was proved in [16], any $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $n \in \mathbb{N}$, can be considered as an element $F^{(n)}(\cdot)$ of the space $\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}$, and $|F^{(n)}(\cdot)|_{\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext}\otimes\mathcal{H}} \leq |F^{(n)}|_{ext}$.

Definition. *Let $F \in (L^2)$ and be such that*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!n|F^{(n)}(\cdot)|^2_{\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext}\otimes\mathcal{H}} < \infty, \tag{9}$$

where $F^{(n)}(\cdot)$ are the kernels from decomposition (4) for F, in point as elements of $\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext}\otimes\mathcal{H}$. We define the Hida stochastic derivative $\partial.F \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$ by setting

$$\partial.F := \sum_{n=1}^{\infty} n\langle P_{n-1}, F^{(n)}(\cdot)\rangle.$$

Theorem. *([16]) The extended stochastic integral $\int \circ(t)\widehat{d}M_t : (L^2) \otimes \mathcal{H} \to (L^2)$ and the Hida stochastic derivative $\partial. : (L^2) \to (L^2)\otimes\mathcal{H}$ are adjoint one to another, and, in particular, are closed operators.*

2 CLARK-OCONE TYPE FORMULAS AND RELATED MATTERS

2.1 A Clark-Ocone formula in the simplest particular case and problems of the general case

Let μ be the generalized Meixner measure on $(\mathcal{D}', C(\mathcal{D}'))$. In the case when μ is not the Gaussian or Poissonian measure ($\eta \neq 0$, see (2)), but $F \in (L^2)$ is differentiable by Hida and is such that all kernels $F^{(n)}$ from decomposition (4) belong to $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}$ (now we consider $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}$ as a subspace of $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ in the generalized sense described in Subsection 1.2), the analog of classical Clark-Ocone formula (1) has a form

$$F = \mathbf{E}F + \int \mathbf{E}\{\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\}dM_t, \tag{10}$$

where the notation as in (1) up to obvious modifications (for example, $\mathcal{F}_t = \sigma(M_s : s \leq t)$). Using the definitions of the Hida stochastic derivative, of the extended stochastic integral and the fact that for an integrable by Itô integrand this integral coincides with the Itô one, of the expectation ($\mathbf{E}F = \int_{\mathcal{D}'} F(x)\mu(dx)$), and the fact that for $F \in (L^2)$ of form (4)

$$\mathbf{E}\{F|_{\mathcal{F}_t}\} = \langle P_0, F^{(0)}\rangle + \sum_{n=1}^{\infty}\langle P_n, F^{(n)}1_{[0,t)^n}\rangle \tag{11}$$

[17], one can conclude that (10) is valid if for any $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ and for each $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}$

$$nPr\big(F^{(n)}(\cdot_1,\dots,\cdot_{n-1},\cdot_n)1_{[0,\cdot_n)^{n-1}}(\cdot_1,\dots,\cdot_{n-1})\big) = F^{(n)}$$

in $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n}$, here and below Pr denotes a symmetrization with respect to all variables. But this equality is fulfilled in $\mathcal{H}^{\widehat{\otimes}n} = L^2(\mathbb{R}_+, m)^{\widehat{\otimes}n}$ (m is the Lebesgue measure on $\mathbb{R}_+$) because if $t_1,\dots,t_n$ are mutually *different* then $Pr1_{[0,t_n)^{n-1}}(t_1,\dots,t_{n-1}) = \frac{1}{n}$, and $m^{\otimes n}(\{t_1,\dots,t_n\} : \exists i,j \in \{1,\dots,n\} : i \neq j, t_i = t_j) = 0$. Note that one can prove (1) and its Poissonian counterpart by the same way.

In the general case not each $F \in (L^2)$ can be presented even in the form

$$F = \mathbf{E}F + \int G(t)\widehat{d}M_t, \tag{12}$$

$G \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$ (see Proposition 2.1 below for details). But even if $F \in (L^2)$ is representable in form (12), formula (10) can be not valid. For example, let $F = \langle P_3, F^{(3)}\rangle$, $F^{(3)} \in \mathcal{H}^{(3)}_{ext}$. Then $\mathbf{E}F = 0$ and it is not difficult to calculate that

$$\int \mathbf{E}\{\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\}dM_t = \langle P_3, F^{(3)}(\cdot_1,\cdot_2,\cdot_3)\big(1_{[0,\cdot_3)^2}(\cdot_1,\cdot_2) + 1_{[0,\cdot_2)^2}(\cdot_3,\cdot_1) + 1_{[0,\cdot_1)^2}(\cdot_2,\cdot_3)\big)\rangle,$$

therefore using (5) and (3) we obtain

$$\|F - \int \mathbf{E}\{\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\}dM_t\|^2_{(L^2)} = 6|F^{(3)}\big(1 - [1_{[0,\cdot_3)^2}(\cdot_1,\cdot_2) + 1_{[0,\cdot_2)^2}(\cdot_3,\cdot_1) + 1_{[0,\cdot_1)^2}(\cdot_2,\cdot_3)]\big)|^2_{ext} =$$

$$18\int_{\mathbb{R}^2_+} |F^{(3)}(t_1,t_1,t_2)|^2 1_{\{t_1\geq t_2\}}\eta(t_1)dt_1dt_2 + 12\int_{\mathbb{R}_+} |F^{(3)}(t_1,t_1,t_1)|^2\eta^2(t_1)dt_1.$$

If $F^{(3)}$ is such that $\int_{\mathbb{R}_+} |F^{(3)}(t_1,t_1,t_1)|^2\eta^2(t_1)dt_1 = 0$ then $\langle P_3, F^{(3)}\rangle$ can be presented in form (12) (see Poposition 2.1 below), but, as we can see from the calculation above, even under this condition it is possible that $F \neq \int \mathbf{E}\{\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\}dM_t$.

Remark 2.1. *It is easy to understand intuitively why Clark-Ocone formula (10) is not valid in the general case: in order to calculate the norms in $\mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $n > 2$, one has to use nonsymmetrical functions, e.g., $Q(t_1,t_2) := F^{(3)}(t_1,t_1,t_2)$; but applying the conditional expectation we "cut off" such functions and therefore lose an information.*

In what follows, we clarify a condition of representability of $F \in (L^2)$ in form (12), and explain how to reconstruct an integrand G.

2.2 A belonging of square integrable functions to the range of values of the extended stochastic integral

We begin from a simple example. Let $F = \langle P_2, F^{(2)}\rangle$, $F^{(2)} \in \mathcal{H}^{(2)}_{ext}$. It is clear that if F is representable in form (12) then $G(\cdot) = \langle P_1, G^{(1)}\rangle$, $G^{(1)} \in \mathcal{H}^{(1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}$, and $F^{(2)} = \widehat{G}^{(1)}$ (see Subsection 1.3). But since by construction $\widehat{G}^{(1)}$ contains a representative $\widehat{g}^{(1)}$ such that for each $t \in \mathbb{R}_+$ $\widehat{g}^{(1)}(t,t) = 0$, we have a *necessary* condition of representability of $\langle P_2, F^{(2)}\rangle$ in form (12): $F^{(2)}$ must contain a representative $f^{(2)}$ such that for each $t \in \mathbb{R}_+$ $f^{(2)}(t,t) = 0$. Moreover, it is easy to see that this condition is *sufficient*: one can set $G^{(1)} := F^{(2)}(\cdot)$ (i.e., we consider $F^{(2)}$ as an element of $\mathcal{H}^{(1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}$).

In a general case the situation is quite similar. Namely, we have the following statement.

Proposition 2.1. *Let $F \in (L^2)$. The following statements are equivalent:*

(1) F can be presented in form (12) with an integrand $G \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$;

(2) for each $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ the kernel $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ from decomposition (4) for F has a representative $f^{(n)}$ such that $f^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = 0$ if for each $i \in \{1, \dots, n\}$ there exists $j \in \{1, \dots, n\}$ such that $i \neq j$, but $t_i = t_j$.

Remark 2.2. *If, for example, $\eta = 0$ (see (2)) then for each $F \in (L^2)$ the condition of statement (2) is automatically fulfilled. In fact, it follows from (3) that considering properties of representatives of $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, one can ignore families of arguments $\{t_1, \dots, t_n\}$ for which there exist $i, j \in \{1, \dots, n\}$ such that $i \neq j$, $t_i = t_j$, $\eta(t_i) = 0$ (i.e., one can redefine these representatives on described families of arguments in compliance with necessity).*

Proof. First we prove this proposition for $F = \langle P_n, F^{(n)}\rangle$, $F^{(n)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

1) ("(2)$\Rightarrow$(1)") Let $f^{(n)}$ be a representative of $F^{(n)}$ that is described in the condition of statement (2). Without loss of generality one can assume that $f^{(n)}$ is a symmetric function. We set

$$\begin{gathered} h_n(t_1, \dots, t_n) = Pr1_{\{t_1\neq t_n, t_2\neq t_n, \dots, t_{n-1}\neq t_n\}} = \\ \frac{1}{n}\left[1_{\{t_1\neq t_n, t_2\neq t_n, \dots, t_{n-1}\neq t_n\}} + 1_{\{t_n\neq t_{n-1}, t_1\neq t_{n-1}, \dots, t_{n-2}\neq t_{n-1}\}} + \dots + 1_{\{t_2\neq t_1, t_3\neq t_1, \dots, t_n\neq t_1\}}\right] \end{gathered} \tag{13}$$

(1_B is the indicator of the event B),

$$g_t^{(n-1)}(t_1, \dots, t_{n-1}) := \begin{cases} \frac{f^{(n)}(t_1, \dots, t_{n-1}, t)}{h_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t)}, & \text{if } h_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t) \neq 0 \\ 0, & \text{if } h_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

(note that if $h_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t) = 0$ then $f^{(n)}(t_1, \dots, t_{n-1}, t) = 0$ by the condition of statement (2)). Using (3), nonatomicity of the Lebesgue measure, the equality

$$h_n(\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{t_{s_1+\dots+s_k}, \dots, t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k}, t) = \frac{1}{n}1_{\{l_k>1\}} + \frac{s_k+1}{n}1_{\{l_k=1\}}$$

for *different* $t_1, \dots, t_{s_1+\dots+s_k}, t$ (here $k, l, s \in \mathbb{N}$, $l_1 > \dots > l_k$, $l_1s_1 + \dots + l_ks_k = n-1$), and the condition from statement (2) (in the last inequality of the forthcoming calculation), we obtain

$$\begin{gathered} |g^{(n-1)}_{\cdot}|^2_{\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext}\otimes\mathcal{H}} = \sum_{\substack{k, l_j, s_j \in \mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>l_2>\dots>l_k, \\ l_1s_1+\dots+l_ks_k=n-1}} \frac{(n-1)!}{l_1^{s_1}\dots l_k^{s_k}s_1!\dots s_k!} \times \\ \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} |g_t^{(n-1)}(\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{t_{s_1+\dots+s_k}, \dots, t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k})|^2 \times \\ \eta^{l_1-1}(t_1)\dots\eta^{l_k-1}(t_{s_1+\dots+s_k})dt_1\dots dt_{s_1+\dots+s_k}dt = \\ n \sum_{\substack{k, l_j, s_j \in \mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k>1, \\ l_1s_1+\dots+l_ks_k+1=n}} \frac{n!}{l_1^{s_1}\dots l_k^{s_k}s_1!\dots s_k!} \times \\ \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} |f^{(n)}(\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{l_1}, \dots, \underbrace{t_{s_1+\dots+s_k}, \dots, t_{s_1+\dots+s_k}}_{l_k}, t)|^2 \times \\ \eta^{l_1-1}(t_1)\dots\eta^{l_k-1}(t_{s_1+\dots+s_k})dt_1\dots dt_{s_1+\dots+s_k}dt + \\ n \sum_{\substack{k, l_j, s_j \in \mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>\dots>l_k=1, \\ l_1s_1+\dots+l_{k-1}s_{k-1}+s_k+1=n}} \frac{n!}{l_1^{s_1}\dots l_{k-1}^{s_{k-1}}s_1!\dots(s_k+1)!(s_k+1)} \times \\ \int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k+1}} |f^{(n)}(\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{l_1}, \dots, t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1}, \dots, t_{s_1+\dots+s_k}, t)|^2 \times \\ \eta^{l_1-1}(t_1)\dots\eta^{l_{k-1}-1}(t_{s_1+\dots+s_{k-1}})dt_1\dots dt_{s_1+\dots+s_k}dt \leq n|F^{(n)}|^2_{ext} < \infty. \end{gathered}$$

Therefore the function $g^{(n-1)}_{\cdot}$ generates an element (an equivalence class) $G^{(n-1)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{(n-1)}_{ext}\otimes\mathcal{H}$. It is easy to see that $\widehat{G}^{(n-1)} = F^{(n)}$ (see Subsection 1.3): for the representative $g^{(n-1)}_{\cdot} \in G^{(n-1)}_{\cdot}$ which is defined by (14) $\widehat{g}^{(n-1)}(\cdot_1, \dots, \cdot_n) = g^{(n-1)}_{\cdot_n}(\cdot_1, \dots, \cdot_{n-1}) \cdot h_n(\cdot_1, \dots, \cdot_n) = f^{(n)}(\cdot_1, \dots, \cdot_n) \in F^{(n)}$ because $f^{(n)}$ is a symmetric function described in the condition of statement (2). Set $G(\cdot) := \langle P_{n-1}, G^{(n-1)}_{\cdot}\rangle$. Now $F = \int G(t)\widehat{d}M_t$, so, the condition of statement (1) is fulfilled.

2) ("(1)$\Rightarrow$(2)") Let the condition of statement (1) be fulfilled, i.e.,

$$\langle P_n, F^{(n)}\rangle = \int \langle P_{n-1}, G_t^{(n-1)}\rangle\widehat{d}M_t, \quad G^{(n-1)}_{\cdot} \in \mathcal{H}^{(n-1)}_{ext} \otimes \mathcal{H}.$$

By definition of the extended stochastic integral it means that $F^{(n)} = \widehat{G}^{(n-1)}$, but an element $\widehat{G}^{(n-1)} \in \mathcal{H}^{(n)}_{ext}$ satisfies the condition from statement (2) by construction.

The carryover of the result to the general case is trivial; we note only that if $F \in (L^2)$ and satisfies the condition of statement (2) then the formally constructed integrand G belongs to $(L^2) \otimes \mathcal{H}$ because for each $n \in \mathbb{N}$ we have $|G^{(n-1)}_{\cdot}|^2_{\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext}\otimes\mathcal{H}} \leq n|F^{(n)}|^2_{ext}$ (for $n = 1$, $G^{(0)}_{\cdot} = F^{(1)} \in \mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)}_{ext}$), therefore $\|G\|^2_{(L^2)\otimes\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)!|G^{(n-1)}_{\cdot}|^2_{\mathcal{H}^{(n-1)}_{ext}\otimes\mathcal{H}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n!|F^{(n)}|^2_{ext} \leq \|F\|^2_{(L^2)} < \infty$. $\square$

Remark 2.3. *Let $F \in (L^2)$ and be presentable in the form $F = \mathbf{E}F + \int \mathcal{G}(t)\widehat{d}M_t$, where $\mathcal{G}(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle P_{n-1}, \mathcal{G}^{(n-1)}_{\cdot}\rangle$, $\mathcal{G}^{(n-1)}_{\cdot} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}$, is a formal series (i.e., this series can diverge in $(L^2) \otimes \mathcal{H}$) and $\int \mathcal{G}(t)\widehat{d}M_t$ is a formal stochastic integral, i.e., $\int \mathcal{G}(t)\widehat{d}M_t = \sum_{n=1}^{\infty}\langle P_n, \widehat{\mathcal{G}}^{(n-1)}\rangle$. As is easy to see, now for each $n \in \mathbb{N}$ $F^{(n)} = \widehat{\mathcal{G}}^{(n-1)}$ in $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, therefore F satisfies the condition of statement (2) of Proposition 2.1 whence it follows that F can be presented in form (12) with an integrand $G \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$ (note that $G \neq \mathcal{G}$, generally speaking). So, in what follows, in corresponding places we will write "F can be presented in form (12)" without the reminder that $G \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$.*

Remark 2.4. *If $F = \langle P_n, F^{(n)}\rangle$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, cannot be presented in form (12), one still can define the function $g_{\cdot}^{(n-1)}$ by (14) and construct the corresponding element $\widehat{G}^{(n-1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$. But now $F^{(n)} \neq \widehat{G}^{(n-1)}$ in $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ and $|\widehat{G}^{(n-1)}|_{ext} < |F^{(n)}|_{ext}$ (the norm $|F^{(n)} - \widehat{G}^{(n-1)}|_{ext}$ contains integrals by families of arguments for which h_n is equal to zero).*

Corollary. *If $F \in (L^2)$ and is presentable in form (12) then the kernels $G_{\cdot}^{(n-1)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}$ from decomposition (6) of an integrand can be constructed by representatives (14).*

2.3 Clark-Ocone type formulas

It is described above how for a representable in form (12) random variable $F \in (L^2)$ to reconstruct a corresponding integrand $G \in (L^2)\otimes\mathcal{H}$. But such a description is not convenient for applications. In this subsection we prove statements, in which an integrand G for a given F is presented in a more convenient for applications form.

We begin from some preparation. For $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ and $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ set $\hbar_n(t_1, \ldots, t_n) := nh_n(t_1, \ldots, t_n)$, where the functions h_n are defined in (13); set also $\hbar_1 \equiv 1$. Further, for $G_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, set

$$\widetilde{G}_{\cdot}^{(n)}(\cdot_1, \ldots, \cdot_n) := \begin{cases} \frac{G_{\cdot}^{(n)}(\cdot_1,\ldots,\cdot_n)}{\hbar_{n+1}(\cdot_1,\ldots,\cdot_n,\cdot)}, & \text{if } \hbar_{n+1}(\cdot_1, \ldots, \cdot_n, \cdot) \neq 0 \\ 0, & \text{if } \hbar_{n+1}(\cdot_1, \ldots, \cdot_n, \cdot) = 0. \end{cases}$$

It is easy to see that $\widetilde{G}_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)} \otimes \mathcal{H}$ and

$$|\widetilde{G}_{\cdot}^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}} \leq |G_{\cdot}^{(n)}|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}}. \tag{15}$$

For $G \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$ we define

$$(AG)(\cdot) := \sum_{n=0}^{\infty}\langle P_n, \widetilde{G}_{\cdot}^{(n)}\rangle,$$

where the kernels $\widetilde{G}_{\cdot}^{(n)}$ are constructed by the kernels $G_{\cdot}^{(n)}$ from decomposition (6) for G. It follows from estimate (15) that A is a linear *continuous* operator in $(L^2) \otimes \mathcal{H}$.

Theorem 1. *Let $F \in (L^2)$, be presentable in form (12) (see Proposition 2.1) and belongs to the domain of the Hida stochastic derivative (see (9)). Then the representation*

$$F = \mathbf{E}F + \int A\partial_t F\widehat{d}M_t \tag{16}$$

is valid, where $\int A\partial_t F\widehat{d}M_t := \int (A\partial_{\cdot} F)(t)\widehat{d}M_t$.

Remark 2.5. *In the classical Gaussian (and Poissonian) analysis one can reconstruct $F - \mathbf{E}F$ for differentiable by Hida $F \in (L^2)$ by using of the Clark-Ocone formula if $\partial_{\cdot} F$ is known. But in the Meixner white noise analysis it is not the case: now it is impossible to reconstruct even $\langle P_n, F^{(n)}\rangle$ ($n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$) if $\partial_{\cdot}\langle P_n, F^{(n)}\rangle$ is known, generally speaking, because different $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ can coincide as elements of $\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)} \otimes \mathcal{H}$. Nevertheless, for F satisfying the conditions of Theorem 1 $F - \mathbf{E}F$ can be reconstructed if $\partial_{\cdot} F$ is known. But for such a reconstruction one has to use the extended stochastic integral in Clark-Ocone type formula (16) because $A\partial_{\cdot} F$ can be nonintegrable by Itô.*

Proof. It is sufficient to prove the theorem for $F = \langle P_n, F^{(n)}\rangle$, $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ (the cases $n = 0$ and $n = 1$ are trivial). Let us accept by definition $\frac{0}{0} := 0$. Using the definitions of the Hida stochastic derivative and of the operator A, we can write

$$A\partial_{\cdot} F = n\langle P_{n-1}, \widetilde{F}^{(n)}(\cdot)\rangle = n\Big\langle P_{n-1}, \frac{f^{(n)}(\cdot_1, \ldots, \cdot_{n-1}, \cdot)}{\hbar_n(\cdot_1, \ldots, \cdot_{n-1}, \cdot)}\Big\rangle = \Big\langle P_{n-1}, \frac{f^{(n)}(\cdot_1, \ldots, \cdot_{n-1}, \cdot)}{h_n(\cdot_1, \ldots, \cdot_{n-1}, \cdot)}\Big\rangle,$$

where $f^{(n)} \in F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ is a *symmetric* function described in statement (2) of Proposition 2.1 (note that if for a family of arguments $t_1, \ldots, t_{n-1}, t \in \mathbb{R}_+$ $h_n(t_1, \ldots, t_{n-1}, t) = 0$ then $f^{(n)}(t_1, \ldots, t_{n-1}, t) = 0$). But by construction of the kernels of the extended stochastic integral (see Subsection 1.3) we have now $\widehat{\frac{f^{(n)}}{h_n}} = f^{(n)} \in F^{(n)}$, whence $\int (A\partial_{\cdot}\langle P_n, F^{(n)}\rangle)(t)\widehat{d}M_t = \langle P_n, F^{(n)}\rangle$, which is what had to be proved. □

Corollary. *If $F \in (L^2)$, can be presented in form (12) and belongs to the domain of the Hida stochastic derivative then an integrand G from (12) can be presented in the form*

$$G(\cdot) = A\partial_{\cdot} F.$$

Formula (16) can be interpreted as a Clark-Ocone type formula in the Meixner white noise analysis, but this formula is not a direct analog of classical Clark-Ocone formula (1). In fact, if μ is the Gaussian or Poissonian measure then, as is easily seen, for $G \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$ we have $(AG)(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle P_n, \frac{G_{\cdot}^{(n)}}{n+1}\rangle$, where $G_{\cdot}^{(n)} \in \mathcal{H}^{\widehat{\otimes} n} \otimes \mathcal{H}$ are the kernels from decomposition (6) for G. On the other hand, one can understand G as the family of functions $g_\alpha : \mathbb{R}_+ \to (L^2)$ ($\|g_\alpha\|_{(L^2)\otimes\mathcal{H}} < \infty$, $\alpha \in \Theta$—some set of indexes) that is defined by an arbitrary representative $g_\alpha \in G$ and is such that for arbitrary $\alpha_1, \alpha_2 \in \Theta$ $\|g_{\alpha_1} - g_{\alpha_2}\|_{(L^2)\otimes\mathcal{H}} = 0$. In this case $\mathbf{E}\{G(\cdot)|_{\mathcal{F}_{\cdot}}\} \in (L^2) \otimes \mathcal{H}$ is an equivalense class in $(L^2) \otimes \mathcal{H}$ that contains the family of functions $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \mathbf{E}\{g_\alpha(t)|_{\mathcal{F}_t}\}$, $\alpha \in \Theta$, and even for G of form $G(\cdot) = \partial_{\cdot} F$, $F \in (L^2)$, we have $\mathbf{E}\{G(\cdot)|_{\mathcal{F}_{\cdot}}\} = \sum_{n=0}^{\infty}\langle P_n, G_{\cdot}^{(n)}1_{[0,\cdot)^n}\rangle \neq (AG)(\cdot)$, generally speaking.

Let us obtain a direct analog of formula (1) in the Meixner white noise analysis. For $n \in \mathbb{N}$ and $t_1, \ldots, t_n, t \in \mathbb{R}_+$ set

$$\chi_{n,t}(t_1, \ldots, t_n) := \begin{cases} 1, & \text{if } \forall i \in \{1, \ldots, n\} : (\forall j \in \{1, \ldots, n\}\backslash\{i\}\ t_i \neq t_j)\ t_i < t, \\ 0, & \text{in other cases}, \end{cases}$$

i.e., $\chi_{n,t}(t_1, \ldots, t_n) = 1$ if all t_i of the multiplicity one are smaller than t. For example, $\chi_{3,5}(6, 6, 4) = 1$ ($4 < 5$, 6 has the multiplicity two), but $\chi_{3,5}(6, 4, 4) = 0$ ($6 > 5$, 6 has the multiplicity one). Set also $\chi_{0,\cdot} \equiv 1$. For $F \in (L^2)$ and $t \in \mathbb{R}_+$ define an operator $\widetilde{\mathbf{E}}\{F|_{\mathcal{F}_t}\} \in (L^2)$ by setting

$$\widetilde{\mathbf{E}}\{F|_{\mathcal{F}_t}\} := \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n, F^{(n)}\chi_{n,t}\rangle, \tag{17}$$

where $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ are the kernels from decomposition (4) for F. As is easily seen, we have $|F^{(n)}\chi_{n,t}|_{ext} \le |F^{(n)}|_{ext}$, therefore $\widetilde{\mathbf{E}}\{\circ|_{\mathcal{F}_t}\}$ is a linear continuous operator in (L^2).

Remark 2.6. *We use for the operator $\widetilde{\mathbf{E}}\{\circ|_{\mathcal{F}_t}\}$ the notation that is similar to the designation of a conditional expectation because these operators are similar in a sense: cf. (17) and (11). Moreover, it is easy to see that in the Gaussian and Poissonian cases $\widetilde{\mathbf{E}}\{\circ|_{\mathcal{F}_t}\} = \mathbf{E}\{\circ|_{\mathcal{F}_t}\}$ because for $n \in \mathbb{N}$ $\chi_{n,t} = 1_{[0,t)^n}$ in $\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$ (i.e., these two functions belong to the same equivalence class in this space).*

Theorem 2. *Let $F \in (L^2)$, be presentable in form (12) (see Proposition 2.1) and belong to the domain of the Hida stochastic derivative (see (9)). Then the representation*

$$F = \mathbf{E}F + \int \widetilde{\mathbf{E}}\{\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\}\widehat{d}M_t \tag{18}$$

is valid.

Remark 2.7. *If the kernels $F^{(n)}$ from decomposition (4) for F can be considered as elements of $\mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$ (see Subsection 1.2) then formula (18) reduces to (10).*

Proof. It is sufficient to prove the theorem for $F = \langle P_n, F^{(n)}\rangle$, $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ (the cases $n = 0$ and $n = 1$ are trivial). Let $f^{(n)} \in F^{(n)}$ and be a symmetric function described in statment (2) of Proposition 2.1. Then for almost all (with respect to the Lebesgue measure) $t \in \mathbb{R}_+$ $\partial_t\langle P_n, f^{(n)}\rangle = n\langle P_{n-1}, f^{(n)}(t)\rangle$, $\widetilde{\mathbf{E}}\{\partial_t\langle P_n, f^{(n)}\rangle|_{\mathcal{F}_t}\} = n\langle P_{n-1}, f^{(n)}(t)\chi_{n-1,t}\rangle$, and

$$\int \widetilde{\mathbf{E}}\{\partial_t\langle P_n, F^{(n)}\rangle|_{\mathcal{F}_t}\}\widehat{d}M_t = \int \widetilde{\mathbf{E}}\{\partial_t\langle P_n, f^{(n)}\rangle|_{\mathcal{F}_t}\}\widehat{d}M_t = n\langle P_n, \widehat{f^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}}\rangle.$$

Therefore we have to show that $n\widehat{f^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}} \in F^{(n)}$ in $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$. Using the construction of $\widehat{f^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}}$, (3), nonatomicity of the Lebesgue measure and the fact that $f^{(n)}$ is a symmetric function satisfying the condition from statement (2) of Proposition 2.1, we obtain

$$\left|F^{(n)} - n\widehat{f^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}}\right|_{ext}^2 = \left|f^{(n)} - n\widehat{f^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot}}\right|_{ext}^2 =$$

$$\sum_{\substack{k,l_j,s_j\in\mathbb{N}:\ j=1,\dots,k,\ l_1>l_2>\dots>l_k=1,\\ l_1s_1+\dots+l_{k-1}s_{k-1}+s_k=n}} \frac{n!}{l_1^{s_1}\dots l_{k-1}^{s_{k-1}}s_1!\dots s_k!}\times$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^{s_1+\dots+s_k}} \Big|f^{(n)}(\underbrace{t_1,\dots,t_1}_{l_1},\dots,\underbrace{t_{s_1+\dots+s_{k-1}},\dots,t_{s_1+\dots+s_{k-1}}}_{l_{k-1}},t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1},\dots,t_{s_1+\dots+s_k})\times$$

$$\big[1 - 1_{\{t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1}<t_{s_1+\dots+s_k},t_{s_1+\dots+s_{k-1}+2}<t_{s_1+\dots+s_k},\dots,t_{s_1+\dots+s_k-1}<t_{s_1+\dots+s_k}\}} -$$

$$1_{\{t_{s_1+\dots+s_k}<t_{s_1+\dots+s_k-1},t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1}<t_{s_1+\dots+s_k-1},\dots,t_{s_1+\dots+s_k-2}<t_{s_1+\dots+s_k-1}\}} - \dots -$$

$$1_{\{t_{s_1+\dots+s_{k-1}+2}<t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1},t_{s_1+\dots+s_{k-1}+3}<t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1},\dots,t_{s_1+\dots+s_k}<t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1}\}}\big]\Big|^2\times$$

$$\eta^{l_1-1}(t_1)\dots\eta^{l_{k-1}-1}(t_{s_1+\dots+s_{k-1}})dt_1\dots dt_{s_1+\dots+s_k} = 0$$

(for *different* $t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1},\dots,t_{s_1+\dots+s_k}$ one and only one indicator in this calculation is equal to one; other cases can be ignored because

$$m^{\otimes s_k}\big(\{t_{s_1+\dots+s_{k-1}+1},\dots,t_{s_1+\dots+s_k}\}:$$
$$\exists i,j\in\{s_1+\dots+s_{k-1}+1,\dots,s_1+\dots+s_k\}: i\neq j, t_i=t_j\big) = 0,$$

where m is the Lebesgue measure on $\mathbb{R}_+$). □

Remark 2.8. *One can introduce a linear continuous operator $\widetilde{\mathbf{E}}\{\circ(\cdot)|_{\mathcal{F}_\cdot}\}$ in $(L^2)\otimes\mathcal{H}$ by setting (cf. (17))*

$$\widetilde{\mathbf{E}}\{G(\cdot)|_{\mathcal{F}_\cdot}\} := \sum_{n=0}^{\infty}\langle P_n, G_\cdot^{(n)}\chi_{n,\cdot}\rangle, \tag{19}$$

where $G_\cdot^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}\otimes\mathcal{H}$ are the kernels from decomposition (6) for G. In this case formula (18) holds true if we accept by definition $\int \widetilde{\mathbf{E}}\{\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\}\widehat{d}M_t := \int \widetilde{\mathbf{E}}\{\partial_\cdot F|_{\mathcal{F}_\cdot}\}(t)\widehat{d}M_t$ (cf. Theorem 1). Note that if $G \in (L^2)\otimes\mathcal{H}$ and $g \in G$ is a representative of G then the function $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \widetilde{\mathbf{E}}\{g(t)|_{\mathcal{F}_t}\} \in (L^2)$ (see (17)) generates the equivalence class in $(L^2)\otimes\mathcal{H}$ that coincides with $\widetilde{\mathbf{E}}\{G(\cdot)|_{\mathcal{F}_\cdot}\}$ (see (19)).

Remark 2.9. *Clark-Ocone type formulas (16) and (18) were proved under a very restrictive assumption that a random variable $F \in (L^2)$ is differentiable by Hida. But one can easily avoid this restriction considering $\partial_\cdot$ as a linear continuous operator acting from (L^2) to $(L^2)_{-1}^0\otimes\mathcal{H}$, where $(L^2)_{-1}^0$ is the so-called parametrized Kondratiev-type space of regular generalized functions [13], and introducing A and $\widetilde{\mathbf{E}}\{\circ|_{\mathcal{F}_t}\}$ as linear continuous operators in $(L^2)_{-1}^0\otimes\mathcal{H}$ and $(L^2)_{-1}^0$ correspondingly by analogy with definitions given above.*

As we can see, the use of the extended stochastic integral and of special operators in Clark-Ocone type formulas is stipulated by properties of the generalized Meixner measure. Nevertheless, in some particular cases one can use the Itô stochastic integral and the conditional expectation. Let us consider the question about this possibility in more details.

Theorem 3. *Let $F \in (L^2)$ and belong to the domain of the Hida stochastic derivative (see (9)). Then the following statements are equivalent:*

(1) F can be presented in form (10);

(2) for each $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ the kernel $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ from decomposition (4) for F has a representative $f^{(n)} \in F^{(n)}$ such that $f^{(n)}(t_1,\dots,t_n) = 0$ if there exist $i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq j$, such that $\max\{t_1,\dots,t_n\} = t_i = t_j$ (i.e., if the multiplicity of maximal $t_\cdot \in \{t_1,\dots,t_n\}$ is greater than one).

Remark 2.10. *It is easy to see, if for some $F \in (L^2)$ the condition of statement (2) of this theorem is fulfilled (for example, it is so in the case $\eta = 0$ (see (2))) then the condition of statement (2) of Proposition 2.1 is fulfilled too.*

Proof. It is sufficient to prove the theorem for $F = \langle P_n, F^{(n)}\rangle$, $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

1) ("(2)⇒(1)") Let $f^{(n)}$ be a representative of $F^{(n)}$ that is described in the condition of statement (2). Without loss of generality one can assume that $f^{(n)}$ is a symmetric function. Using (11), properties of the extended stochastic integral (see Subsection 1.3), and the fact that if $Pr1_{[0,t_n)^{n-1}}(t_1,\dots,t_{n-1}) = 0$ then $f^{(n)}(t_1,\dots,t_n) = 0$ by the condition from statement (2) (because $Pr1_{[0,t_n)^{n-1}}(t_1,\dots,t_{n-1}) = 0$ if and only if the multiplicity of maximal $t \in \{t_1,\dots,t_n\}$ is greater than one), we obtain

$$\int \mathbf{E}\{\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\}\widehat{d}M_t = \int \mathbf{E}\{\partial_t\langle P_n, f^{(n)}\rangle|_{\mathcal{F}_t}\}\widehat{d}M_t = \int n\langle P_{n-1}, f^{(n)}(t)1_{[0,t)^{n-1}}\rangle\widehat{d}M_t =$$
$$\langle P_n, nf^{(n)}Pr1_{[0,\cdot_n)^{n-1}}(\cdot_1,\dots,\cdot_{n-1})\rangle = \langle P_n, f^{(n)}\rangle = F.$$

2) ("(1)⇒(2)") If $F = \langle P_n, F^{(n)}\rangle$ can be presented in form (10) then, as is easy to calculate, $\widehat{nF^{(n)}(\cdot)1_{[0,\cdot)^{n-1}}} = F^{(n)}$. But by construction the equivalence class $\widehat{nF^{(n)}(\cdot)1_{[0,\cdot)^{n-1}}} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ contains a function $f^{(n)}$ that satisfies the condition from statement (2): one can consider a *symmetric* function $\widetilde{f}^{(n)} \in F^{(n)}$ in $\mathcal{H}_{ext}^{(n)}$ and set

$$f^{(n)}(t_1,\dots,t_n) := \begin{cases} \widetilde{f}^{(n)}(t_1,\dots,t_n), & \text{if } Pr1_{[0,t_n)^{n-1}}(t_1,\dots,t_{n-1}) \neq 0 \\ 0, & \text{if } Pr1_{[0,t_n)^{n-1}}(t_1,\dots,t_{n-1}) = 0. \end{cases}$$

□

Proposition 2.2. *Let $F \in (L^2)$, belong to the domain of the Hida stochastic derivative (see (9)) and be presentable in form (10) (see Theorem 3). Then $\widetilde{\mathbf{E}}\{\partial_\cdot F|_{\mathcal{F}_\cdot}\} = \mathbf{E}\{\partial_\cdot F|_{\mathcal{F}_\cdot}\}$ in $(L^2)\otimes\mathcal{H}$ (see Remark 2.8).*

Proof. It is sufficient to prove the statement for $F = \langle P_n, F^{(n)}\rangle$, $F^{(n)} \in \mathcal{H}_{ext}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ (the cases $n = 0$ and $n = 1$ are trivial). Let $f^{(n)}$ be a representative of $F^{(n)}$ that is described in the condition of statement (2) of Theorem 3. It is sufficient to show that $f^{(n)}(\cdot)\chi_{n-1,\cdot} = f^{(n)}(\cdot)1_{[0,\cdot)^{n-1}}$ in $\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)}\otimes\mathcal{H}$. Let $t_1,\dots,t_{n-1},t \in \mathbb{R}_+$ and be such that $f^{(n)}(t_1,\dots,t_{n-1},t)$ is well-defined. As is easy to see, if $\chi_{n-1,t}(t_1,\dots,t_{n-1}) - 1_{[0,t)^{n-1}}(t_1,\dots,t_{n-1}) \neq 0$ then the multiplicity of $\max\{t_1,\dots,t_{n-1},t\}$ is greater then one, but in this case $f^{(n)}(t_1,\dots,t_{n-1},t) = 0$. So, in any case $f^{(n)}(t_1,\dots,t_{n-1},t)[\chi_{n-1,t}(t_1,\dots,t_{n-1}) - 1_{[0,t)^{n-1}}(t_1,\dots,t_{n-1})] = 0$ and therefore $|f^{(n)}(\cdot)[\chi_{n-1,\cdot} - 1_{[0,\cdot)^{n-1}}]|_{\mathcal{H}_{ext}^{(n-1)}\otimes\mathcal{H}} = 0$, which is what had to be proved. □

REFERENCES

1. Кабанов Ю.М. *Расширенные стохастические интегралы* // Теория вероятностей и ее приложения. — 1975. — Т.20, №4. — С. 725–737.
2. Кабанов Ю.М., Скороход А.В. *Расширенные стохастические интегралы* // Материалы школы-семинара по теории случайных процессов, Вильнюс, Ин-т физики и математики. — 1975. — Т.I. — С. 123–167.
3. Скороход А.В. *Об обобщении стохастического интеграла* // Теория вероятностей и ее приложения. — 1975. — Т.20, №2. — С. 223–238.
4. Aase K., Oksendal B., Privault N., Uboe J. *White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem with application to mathematical finance*, Finance Stochastics, **4**, 4 (2000), 465–496.

5. Benth F.E., Di Nunno G., Lokka A., Oksendal B., Proske F. *Explicit representation of the minimal variance portfolio in markets driven by Lévy processes*, Math. Finance, **13**, 1 (2003), 55–72.
6. Clark J.M. *The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals*, Ann. Math. Stat., **41**, 4 (1970), 1282–1295.
7. De Faria M., Oliveira M.J., Streit L. *A generalized Clark-Ocone formula*, Random Oper. Stoch. Equ., **8**, 2 (2000), 163–174.
8. Di Nunno G., Oksendal B., Proske F., Malliavin calculus for Lévy processes with applications to finance. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2009. — XIV+413 p.
9. Di Nunno G., Oksendal B., Proske F. *White noise analysis for Lévy processes*, J. Funct. Anal., **206**, 1 (2004), 109–148.
10. Es-Sebaiy K., Tudor C.A. *Lévy processes and Itô-Skorokhod integrals*, Theory Stoch. Process., **14**, 2 (2008), 10–18.
11. Gelfand I.M., Vilenkin N.Ya., Generalized Functions: Vol. 4. Applications of harmonic analysis. Academic Press, New York–London, 1964. — XIV+384 p.
12. Grecksch W., Roth C., Anh V.V. *Q-fractional Brownian motion in infinite dimensions with application to fractional Black-Scholes market*, Stoch. Anal. Appl., **27**, 1 (2009), 149–175.
13. Kachanovsky N.A. *An extended stochastic integral and a Wick calculus on parametrized Kondratiev-type spaces of Meixner white noise*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., **11**, 4 (2008), 541–564.
14. Kachanovsky N.A. *Generalized stochastic derivatives on a space of regular generalized functions of Meixner white noise*, Meth. Func. Anal. and Top., **14**, 1 (2008), 32–53.
15. Kachanovsky N.A. *Generalized stochastic derivatives on parametrized spaces of regular generalized functions of Meixner white noise*, Meth. Func. Anal. and Top., **14**, 4 (2008), 334–350.
16. Kachanovsky N.A. *On an extended stochastic integral and the Wick calculus on the connected with the generalized Meixner measure Kondratiev-type spaces*, Meth. Func. Anal. and Top., **13**, 4 (2007), 338–379.
17. Kachanovsky N.A., Tesko V.A. *Stochastic integral of Hitsuda-Skorohod type on the extended Fock space*, Ukr. Math. J., **61**, 6 (2009), 873–907.
18. Karatzas I., Ocone D. *A generalized Clark representation formula, with application to optimal portfolios*, Stochastics Rep., **34**, 3-4 (1991), 187–220.
19. Karatzas I., Ocone D., Li, J. *An extension of Clark's formula*, Stochastics Rep., **37**, 3 (1991), 127–131.
20. Lokka A. *Martingale representation of functionals of Lévy Processes*, Stoch. Anal. Appl., **22**, 4 (2004), 867–892.
21. Lokka A., Martingale Representation, Chaos Expansion and Clark-Ocone Formulas. Research Report, Centre for Mathematical Physics and Stochastics, University of Aarhus, Denmark, 22, 1999. — 24 p.
22. Maas J., van Neerven J. *A Clark-Ocone formula in UMD Banach spaces*, Electron. Commun. Probab., 13 (2008), 151–161.
23. Peccati G., Taqqu M.S. *Stable convergence of generalized L^2 stochastic integrals and the principle of conditioning*, Electron. J. Probab., **12**, 15 (2007), 447–480.
24. Nualart D., Schoutens W. *Chaotic and predictable representations for Lévy processes*, Stochastic Proc. Appl., **90**, 1 (2000), 109–122.
25. Ocone D. *Malliavin's calculus and stochastic integral: representation of functionals of diffusion processes*, Stochastics, 12, 3-4 (1984), 161–185.
26. Osswald H. *Malliavin calculus on extensions of abstract Wiener spaces*, J. Math. Kyoto Univ., **48**, 2 (2008), 239–263.

27. Rodionova I.V. *Analysis connected with generating functions of exponential type in one and infinite dimensions*, Meth. Func. Anal. and Top., **11**, 3 (2005), 275–297.

28. Schoutens W., Stochastic processes and orthogonal polynomials. Lecture Notes in Statistics 146. Springer, New York, 2000. — XIV+163 p.

29. Skorohod A.V., Integration in Hilbert Space. Springer, New York–Heidelberg, 1974. — XII+177 p.

30. Zhang Xi. *Clark-Ocone formula and variational representation for Poisson functionals*, An. Probab., **37**, 2 (2009), 506–529.

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,
Kyiv, Ukraine

Received 17.02.2011

Качановський М.О. *Формули типу Кларка-Окона у майкснерівському аналізі білого шуму* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 56–72.

У класичному гауссівському аналізі формула Кларка-Окона дозволяє відтворити підінтегральну функцію, якщо відомий стохастичний інтеграл Іто. Цю формулу можна записати у вигляді

$$F = \mathbf{E}F + \int \mathbf{E}\{\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\}dW_t,$$

де функція (випадкова величина) F є квадратично інтегровною за гауссівською мірою та диференційовною за Хідою; $\mathbf{E}$ — математичне сподівання; $\mathbf{E}\{\circ|_{\mathcal{F}_t}\}$ — умовне математичне сподівання відносно повної σ-алгебри $\mathcal{F}_t$, породженої вінерівським процесом W до моменту часу t; $\partial_\cdot F$ — похідна Хіди F; $\int \circ(t)dW_t$ — стохастичний інтеграл Іто за вінерівським процесом.

У цій статті ми пояснюємо як відтворити підінтегральну функцію у випадку, коли замість гауссівської міри розглядається так звана узагальнена міра Майкснера μ (в залежності від параметрів μ може бути гауссівською, пуассонівською, гамма мірою та ін.), та отримуємо відповідні формули типу Кларка-Окона.

Качановский Н.А. *Формулы типа Кларка-Окона в майкснеровском анализе белого шума* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 56–72.

В классическом гауссовском анализе формула Кларка-Окона позволяет восстановить подынтегральную функцию, если известен стохастический интеграл Ито. Эту формулу можно записать в виде

$$F = \mathbf{E}F + \int \mathbf{E}\{\partial_t F|_{\mathcal{F}_t}\}dW_t,$$

где функция (случайная величина) F квадратично интегрируема по гауссовской мере и дифференцируема по Хиде; $\mathbf{E}$ — математическое ожидание; $\mathbf{E}\{\circ|_{\mathcal{F}_t}\}$ — условное математическое ожидание относительно полной σ-алгебры $\mathcal{F}_t$, порожденной винеровским процессом W до момента времени t; $\partial_\cdot F$ — производная Хиды F; $\int \circ(t)dW_t$ — стохастический интеграл Ито по винеровскому процессу.

В этой статье мы объясняем как восстановить подынтегральную функцию в случае, когда вместо гауссовской меры рассматривается так называемая обобщенная мера Майкснера μ (в зависимости от параметров μ может быть гауссовской, пуассоновской, гамма мерой и др.), и получаем соответствующие формулы типа Кларка-Окона.

Карпатські математичні публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №1

УДК 517.98

LOZYNSKA V.YA.

EXPONENTIAL TYPE DISTRIBUTIONS AND A GENERALIZED FUNCTIONAL CALCULUS FOR GENERATORS OF C_0-GROUPS

Lozynska V.Ya. *Exponential type distributions and a generalized functional calculus for generators of C_0-groups*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 73–84.

The properties of a dual space to a space of entire functions of exponential type of many complex variables, that on the real subspace belongs to $L_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$ are described. A functional calculus for generators of strongly continuous groups of bounded linear operators on an arbitrary Banach space in a Fourier-image of such dual space is constructed.

INTRODUCTION

In this paper we consider a space of entire functions of exponential type for which their restriction onto the real subspace belong to $L_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$. This space has a property to be invariant with respect to the action of partial differential operators. This property allows us to introduce in the dual space of linear continuous functionals (so called exponential type distributions) a convolution operation and we can consider this space as a convolution topological algebra. In the Fourier-image of such algebra we construct a functional calculus for generators of strongly continuous multi-parameter groups on a Banach space. This functional calculus is a generalization of the well-known Fourier operator transform for convolution algebras of measures [8],[2] and the calculus for generators of nonquasianalytic groups in algebras of entire functions of exponential type [12]. This approach gives an effective method for investigation of differential operators and functions of them. We construct the functional calculus as generalized functions of generators of C_0–groups. In practice some generalized functions (δ–functions) of concrete operators appear in the Quantum theory [3], [4].

The existence of the structure of the convolution algebra on the space of exponential type distributions follows from the invariant properties in this space with respect to differential operators and plays a crucial role to construct the functional calculus. The invariant properties of subspaces of exponential type of entire functions in a wide context exponential type vectors of unbounded linear operators on the Banach spaces are used in the operator calculus [14], [10], [5], in the theory of Differential equations [14], [6] and in the Approximation theory in Banach spaces [6], [15].

2000 *Mathematics Subject Classification:* 47A60.
Key words and phrases: exponential type distributions, generalized functional calculus, Fourier-image.

1 Algebras of exponential type distributions

1.1 Spaces of entire functions of exponential type

We define a space of test functions and prove its basic properties. Let $L_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$ be a complex Banach space of functions $\varphi(t)$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, with the norm

$$\|\varphi\|_{L_p} := \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(t)|^p \, dt \Big)^{1/p}.$$

We use next notations $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$, $k! = k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!$, $kr = (k_1 r, \dots, k_n r)$ for $r \in \mathbb{C}$, $D^k = D_1^{k_1} \dots D_n^{k_n}$, where $D_j = -i\partial/\partial t_j$ for all $j = 1, \dots, n$. The domain of the operator of partial differentiation $D_j^{k_j}$ is: $\mathrm{dom}\,(D_j^{k_j}) = \{\varphi \in \mathrm{dom}\,(D_j^{k_j - 1}) : D_j\varphi \in \mathrm{dom}\,(D_j^{k_j - 1})\}$ for $k_j \ge 1$, $\mathrm{dom}\,(D_j^0) = L_p$ for $k_j = 0$ for all $j = 1, \dots, n$. Hence, $\mathrm{dom}\,(D^k) = \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{dom}\,(D_j^{k_j})$ is the domain of the operator D^k.

If $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$ and $\psi \in L_q(\mathbb{R}^n)$, where $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, then convolution is defined by $(\varphi * \psi)(t) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(s)\psi(t-s)\, ds$. For $p = 1$ the space $L_1(\mathbb{R}^n)$ is a Banach algebra with respect to the convolution.

Let us consider on $L_p(\mathbb{R}^n)$ the following isometric shift group

$$T_s = e^{-i(s_1 D_1 + \ldots + s_n D_n)} : \varphi(t) \longrightarrow \varphi(t - s), \qquad s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n,$$

where $D_1 = -i\partial/\partial t_1, \dots, D_n = -i\partial/\partial t_n$ are the operators of partial differentiation.

For an arbitrary vector $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $\nu_j > 0$ $(j = 1, \dots, n)$ we define the space

$$\mathcal{E}_p^\nu := \Big\{ \varphi \in \bigcap_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \mathrm{dom}\,(D^k) : \|\varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\|D^k\varphi\|_{L_p}}{\nu^k} < \infty \Big\},$$

where $k = (k_1, \dots, k_n)$, $\nu^k = \nu_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \nu_n^{k_n}$, $D^k = D_1^{k_1} \dots D_n^{k_n}$. From the next inequality $\|\varphi\|_{L_p} \le \|\varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu}$ which is true for an arbitrary $\varphi \in \mathcal{E}_p^\nu$ it follows that the embedding $\mathcal{E}_p^\nu \subset L_p(\mathbb{R}^n)$ is continuous.

In the class of entire analytic functions of n complex variables $\mathbb{C}^n \ni t + i\tau \longrightarrow \Phi(t + i\tau) \in \mathbb{C}$ we consider a subspace $\mathcal{M}_p^\nu = \mathcal{M}_p^\nu(\mathbb{C}^n)$ of functions Φ such that for each fixed vector $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$ a corresponding function of n real variables $\mathbb{R}^n \ni t \longrightarrow \Phi(t + i\tau)$ belongs to the space $L_p(\mathbb{R}^n)$ such that the norm

$$\|\Phi\|_{\mathcal{M}_p^\nu} = \sup_{\tau \in \mathbb{R}^n} \exp\Big(\sum_{j=1}^{n} -\nu_j|\tau_j| \Big) \Big[\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(t + i\tau)|^p dt \Big]^{1/p}$$

is finite. It is know [13] that the spaces $\mathcal{M}_p^\nu$ consist of the functions of exponential type.

Functions $\Phi(t + i\tau)$ from the class $\mathcal{M}_p^\nu$ such that each $\varphi(t) = \Phi(t + i0) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ satisfies the Bernstein's inequality ([13], III, 3.2.2) ([1], IV, 8.3) on $\mathbb{R}^n$:

$$\|D^k\varphi\|_{L_p} \le \nu^k \, \|\varphi\|_{L_p}, \tag{1}$$

where $\nu^k = \nu_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \nu_n^{k_n}$.

Theorem 1. (i) *The mapping* $\mathcal{M}_p^\nu \ni \Phi(t + i\tau) \longrightarrow \varphi(t) := \Phi(t + i0) \in \mathcal{E}_p^\nu$ *is an isometry of the normed spaces.*

(ii) *The embeddings* $\mathcal{E}_p^\nu \subset L_p(\mathbb{R}^n)$ *are isometric.*

(iii) *The spaces* $\mathcal{E}_p^\nu$ *are invariant with respect to the action of the group* T_{-s}, *and the restriction* $T_{-s} : \mathcal{E}_p^\nu \longrightarrow \mathcal{E}_p^\nu$ *is an isometry of the normed spaces.*

Proof. (i) Let $\Phi \in \mathcal{M}_p^\nu$. A restriction $\varphi(t) = \Phi_{|\mathbb{R}^n}$ of a functions $\Phi(t + i\tau) \in \mathcal{M}_p^\nu$ on the real subspace $\mathbb{R}^n$ satisfies the Bernstein's inequality (1)

$$\|D^k\varphi\|_{L_p} \le \nu^k \|\varphi\|_{L_p} \qquad (\forall \Phi \in \mathcal{M}_p^\nu), \tag{2}$$

where $\nu^k \equiv \nu_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \nu_n^{k_n}$. From (2) we obtain $\|\varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu} \le \|\varphi\|_{L_p}$. From the definition of the norm of the space $\mathcal{M}_p^\nu$ it follows $\|\varphi\|_{L_p} \le \|\Phi\|_{\mathcal{M}_p^\nu}$ $(\forall \Phi \in \mathcal{M}_p^\nu)$, i.e. $\mathcal{M}^\nu_{p\,|\mathbb{R}^n} \subset \mathcal{E}_p^\nu$.

Conversely, let $\varphi \in \mathcal{E}_p^\nu$. Let us consider the power series $\varphi(t + i\tau) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \dfrac{(i\tau)^k D^k\varphi}{k!}$. The following inequalities

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(t + i\tau)|^p dt \Big)^{1/p} \le \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{|\tau^k| \, \|D^k\varphi\|_{L_p}}{k!} \le \|\varphi\|_{L_p} \exp\Big(\sum_{j=1}^{n} \nu_j|\tau_j| \Big)$$

are valid so $\|\Phi\|_{\mathcal{M}_p^\nu} \le \|\varphi\|_{L_p}$. The series is convergent and the function $\varphi(t + i\tau)$ is an entire function of class $\mathcal{M}_p^\nu$. Hence $\mathcal{E}_p^\nu \subset \mathcal{M}^\nu_{p\,|\mathbb{R}^n}$ and we obtain $\mathcal{E}_p^\nu = \mathcal{M}^\nu_{p\,|\mathbb{R}^n}$.

(ii) Since $\|\varphi\|_{L_p} \le \|\varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu}$, then $\|\varphi\|_{L_p} \le \|\varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu} \le \|\varphi\|_{L_p} \le \|\Phi\|_{\mathcal{M}_p^\nu} \le \|\varphi\|_{L_p}$ $(\forall \varphi \in \mathcal{E}_p^\nu)$ and a necessary isometric isomorphism is $\mathcal{E}_p^\nu = \mathcal{M}^\nu_{p\,|\mathbb{R}^n}$. In particular $\mathcal{E}_p^\nu \subset L_p(\mathbb{R}^n)$.

(iii) For all $k \in \mathbb{Z}_+^n$ and $s \in \mathbb{R}^n$ next equality $\|T_{-s}D^k\varphi\|_{L_p} = \|D^k\varphi\|_{L_p}$ is valid. From the identity $D^k\psi(s) = T_{-t}D^k\varphi(s)$, where $\psi : \mathbb{R}^n \ni s \to T_{-s}\varphi(t)$, we obtain $\|D^k\psi(s)\|_{L_p} = \|D^k\varphi(s)\|_{L_p}$. Then the inequality (1) has the view $\|D^k\psi\|_{L_p} \le \nu^k \, \|\varphi\|_{L_p}$. From this we obtain the inequality

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(t + i\tau)|^p dt \Big)^{1/p} \le \|\varphi\|_{L_p} \exp\Big(\sum_{j=1}^{n} \nu_j|\tau_j| \Big),$$

then $\psi \in \mathcal{M}_p^\nu$. □

Theorem 2. $\mathcal{E}_p^\nu$ *are Banach spaces.*

Proof. Each of operators D_j on $L_p(\mathbb{R}^n)$ $(j = 1, \dots, n)$ is a generator of a one-parameter isometric shift group [9]

$$\varphi(t) \longrightarrow \varphi(t_1, \dots, t_{j-1}, t_j - \xi_j, t_{j+1}, \dots, t_n).$$

We use the inequality $\|D^k\varphi\|_{L_p} \le \nu^k\|\varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu}$, $\varphi \in \mathcal{E}_p^\nu$ for all $k \in \mathbb{Z}_+^n$. If $\{\varphi_m\}$ is a Cauchy sequence in $\mathcal{E}_p^\nu$, then $\{D^k\varphi_m\}$ is the same sequence in $L_p(\mathbb{R}^n)$ for every fixed k. To the induction (by k) and that D_j in $L_p(\mathbb{R}^n)$ is closed it follows that there is a function $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$, for which

$$\lim_{m \to \infty} \|D^k\varphi_m - D^k\varphi\|_{L_p} = 0 \tag{3}$$

for any k. Then for any $\varepsilon > 0$ there is a number $m(\varepsilon)$ such that

$$\|\varphi_m - \varphi_l\|_{\mathcal{E}_p^\nu} < \max_{0\le|k|\le m(\varepsilon)} \frac{\|D^k\varphi_m - D^k\varphi_l\|_{L_p}}{\nu^k} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{4}$$

for all $m, l \ge m(\varepsilon)$. Thus $\|\varphi_l\|_{\mathcal{E}_p^\nu} \le \|\varphi_{m(\varepsilon)}\|_{\mathcal{E}_p^\nu} + \|\varphi_{m(\varepsilon)} - \varphi_l\|_{\mathcal{E}_p^\nu} < \|\varphi_{m(\varepsilon)}\|_{\mathcal{E}_p^\nu} + \varepsilon$ for all $l \ge m(\varepsilon)$.We take a limit in the last inequality for $l \to \infty$ and use the inequality (4), we obtain $\|\varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu} \le \|\varphi_{m(\varepsilon)}\|_{\mathcal{E}_p^\nu} + \varepsilon$. Thus, $\varphi \in \mathcal{E}_p^\nu$. We take a limit in (4) for $l \to \infty$ and use (3), we obtain $\|\varphi_m - \varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu} \le \varepsilon$ for all $m \ge m(\varepsilon)$. The theorem is proved. □

Let

$$\mathcal{E}_p := \bigcup_\nu \mathcal{E}_p^\nu = \lim_\nu \operatorname{ind} \mathcal{E}_p^\nu$$

be the union of spaces endowed with a topology of the inductive limit, where the embeddings $\mathcal{E}_p^\nu \subset \mathcal{E}_p^\mu$ are continuous. The vector $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ is such that $\nu_1 \le \mu_1, \dots, \nu_n \le \mu_n$. The locally convex space $\mathcal{E}_p$ we will call a space of test functions. The space $\mathcal{E}_p$ belongs to the domain of differential operators D_j and is invariant relatively to their action. From a property of regular inductive limits (see [10], [14]) it follows that every bounded subset S of the space $\mathcal{E}_p$ is bounded in some $\mathcal{E}_p^\nu$.

1.2 Distributions of exponential type

We introduce exponential type distributions. We show that the space of exponential type distributions is a convolution algebra.

By $\mathcal{E}_p'$ we denote a dual space of $\mathcal{E}_p$ with a weak topology. The duality $\langle \mathcal{E}_p' \mid \mathcal{E}_p\rangle$ can be determined by a bilinear form $\langle f \mid \varphi\rangle := \langle f_\nu \mid \varphi\rangle$, where ν is an arbitrary vector such that $\varphi \in \mathcal{E}_p^\nu$ and $f_\nu := f|_{\mathcal{E}_p^\nu}$. Functionals $f \in \mathcal{E}_p'$ will be called exponential type distributions.

For any $f \in \mathcal{E}_p'$ and $\varphi \in \mathcal{E}_p$ the following relation

$$\langle D^k f \mid \varphi\rangle = (-1)^{|k|}\langle f \mid D^k\varphi\rangle \qquad (k \in \mathbb{Z}_+^n)$$

correctly defines an operation of a generalized differentiation of distributions.

Theorem 3. *[11] The continuous and dense embeddings $\mathcal{E}_p \subset L_p(\mathbb{R}^n)$, $L_p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{E}_q'$, where $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ are valid.*

A convolution of a distribution $f \in \mathcal{E}_p'$ and a function $\varphi \in \mathcal{E}_p$ will be defined as the relation

$$(f \star \varphi)(t) := \langle f(s) \mid \varphi(t+s)\rangle = \langle f(s) \mid T_{-s}\varphi(t)\rangle = \langle f(s) \mid T_{-t}\varphi(s)\rangle,$$

where $f(s)$ denotes an action of a functional f on a function $T_{-s}\varphi(t)$ by s.

Let $\mathcal{L}(\mathcal{E}_p)$ be an algebra of linear continuous operators on the space $\mathcal{E}_p$ with a strong operator topology.

Theorem 4. *Let $f, g \in \mathcal{E}_p'$ and $\varphi \in \mathcal{E}_p$. The space $\mathcal{E}_p'$ is a commutative algebra with respect to a convolution defined by the relation*

$$(f * g) \star \varphi := f \star (g \star \varphi).$$

The mapping $\mathcal{E}_p' \ni f \longrightarrow K_f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_p)$, where $K_f\varphi := f \star \varphi$, is an algebraic isomorphism on a commutant of the group T_{-s} in the algebra $\mathcal{L}(\mathcal{E}_p)$. The convolution has properties

$$D^k(f \star \varphi) = f \star (D^k\varphi) = (-1)^{|k|}(D^k f) \star \varphi,$$

$$D^k(f * g) = (D^k f) * g = f * (D^k g)$$

for any $k \in \mathbb{Z}_+^n$.

Proof. For $\varphi \in \mathcal{E}_p^\nu$ we have $\|K_f\varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu} \le \|f_\nu\| \, \|T_{-s}\varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu}$. From Theorem 1 (iii) $\|T_{-s}\varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu} = \|\varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu}$, then $K_f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_p^\nu)$, $\forall\nu$. Thus, $K_f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_p)$.

From Theorem 3 there are functions $g_\gamma \in L_q(\mathbb{R}^n)$ such that $\lim_\gamma g_\gamma = g$ in $\mathcal{E}_p'$. The duality $\langle L_q(\mathbb{R}^n) \mid L_p(\mathbb{R}^n)\rangle$ is defined by $\langle g_\gamma \mid \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(r)\varphi(r)\,dr$, then $(g_\gamma \star \varphi)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(r)T_{-t}\varphi(r)\,dr$. The function $\mathbb{R}^n \ni r \longrightarrow T_{-s-t}\varphi(r) \in \mathcal{E}_p^\nu$ is continuous for fixed t. And then

$$f \star (g_\gamma \star \varphi) = \big\langle f(s) \mid T_{-s}(g_\gamma \star \varphi)(t)\big\rangle = \Big\langle f(s) \mid \int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(r)T_{-s-t}\varphi(r)\,dr\Big\rangle =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\gamma(r)\langle f(s) \mid T_{-s-t}\varphi(r)\rangle\,dr = \big\langle g_\gamma(r) \mid \langle f(s) \mid T_{-s-t}\varphi(r)\rangle\big\rangle = g_\gamma \star (f \star \varphi).$$

From this $f \star (g \star \varphi) = \lim_\gamma f \star (g_\gamma \star \varphi) = \lim_\gamma g_\gamma \star (f \star \varphi) = g \star (f \star \varphi)$.

Let us prove an isomorphism of the space $\mathcal{E}_p'$ to a commutant of the group T_{-s}. Let $f \in E_p'$ and $\varphi \in \mathcal{E}_p^\nu$. From the definition of the convolution and Theorem 1, we obtain $\|f \star \varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu} \le \|f\|_{\mathcal{E}_p^\nu}\|\varphi\|_{L_p}$, where $\|f\|_{\mathcal{E}_p^\nu}-$ the norm of restriction of a functional f on $\mathcal{E}_p^\nu$. Then from $D^k(f \star \varphi)(t) = \big\langle f(s)\,,\, T_{-s}\,D^k\varphi(t)\big\rangle = (f \star D^k\varphi)(t)$ it follows $\|f \star \varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu} = \sup\limits_k \frac{\|f \star D^k\varphi\|_{L_p}}{\nu^k} \le \|f\|_{\mathcal{E}_p^\nu}\|\varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu}$. The embeddings $\mathcal{E}_p^\nu \subset \mathcal{E}_p$ are continuous then $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_p^\nu)$ and we have $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_p)$. The relation

$$K_f T_{-s}\varphi = T_{-s}K_f\varphi \qquad (\forall\varphi \in \mathcal{E}_p.\quad s \in \mathbb{R}^n) \tag{5}$$

follows from the equalities $(f \star T_{-s}\varphi)(t) = (f \star \varphi)(t+s) = T_{-s}(f \star \varphi)(t)$.

To prove the converse, let $\varphi \in \mathcal{E}_p$. The mapping $f : \varphi \to (F\varphi)(0)$ is a functional $f \in \mathcal{E}_p'$. From this we obtain $(F\varphi)(0) = \langle f\,,\,\varphi\rangle = (f \star \varphi)(0)$. Replacing φ by $T_{-t}\varphi$ and using (5), we have $K_f : \mathcal{E}_p \ni \varphi \longrightarrow f \star \varphi$.

Now we prove differential properties of the convolution. Obviously, $D^k(f \star \varphi)(t) = \big\langle f(s) \mid T_{-s}D^k\varphi(t)\big\rangle = (f \star D^k\varphi)(t)$. Next relations

$$(f \star \varphi)(t) = \langle f(s) \mid T_{-t}\varphi(s)\rangle = \langle f(s+t-t) \mid \varphi(s+t)\rangle = \langle T_{-r}f(-t) \mid \varphi(r)\rangle$$

are valid. Then we have $D^k(f \star \varphi)(t) = (-1)^{|k|}\big\langle T_{-r}(D^k f)(-t) \mid \varphi(r)\big\rangle = (-1)^{|k|}(D^k f \star \varphi)(t)$ and $D^k(f * g) \star \varphi = (-1)^{|k|}(f * g) \star D^k\varphi = (-1)^{|k|} f \star (g \star D^k\varphi) = f \star (D^k g \star \varphi) = (f * D^k g) \star \varphi$. Using the commutation we obtain $D^k(f * g) = D^k(g * f) = g * D^k f$. □

Corollary 1.1. *For an arbitrary distribution $f \in \mathcal{E}'_p$ and a vector ν the subspace $\mathcal{E}^\nu_p$ is invariant relatively to K_f and $K_{f_\nu} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}^\nu_p)$.*

Corollary 1.2. *Let $f \in \mathcal{E}'_p$ and $\varphi \in \mathcal{E}_p$, $\psi \in \mathcal{E}_q$, where $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Then $(f \star \varphi) * \psi = f \star (\varphi * \psi)$.*

Proof. Since $f \star \varphi \in \mathcal{E}_p$ then $[(f \star \varphi) * \psi](t) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle f(s) \mid T_{-s}\varphi(r)\rangle T_r\psi(t)\,dr = \langle f(s) \mid T_{-s} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(r) T_r\psi(t)\,dr\rangle = [f \star (\varphi * \psi)](t)$. □

1.3 The Fourier transformation

We introduce the Fourier transformation onto the space of exponential type distribution. For $p = 1$ let us denote $\widehat{\mathcal{E}}_1 := \left\{\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it\cdot\xi}\varphi(t)\,dt \,:\, \varphi \in \mathcal{E}_p\right\}$, for $1 < p < \infty$ $\widehat{\mathcal{E}}_p := \left\{\widehat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}(\varphi) : \varphi \in \mathcal{E}_p\right\}$, where $t \cdot \xi := t_1\xi_1 + \ldots + t_n\xi_n$ for any $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. The Fourier transformation is a linear isomorphism $\mathcal{F} : \mathcal{E}_p \ni \varphi(t) \longrightarrow \widehat{\varphi}(\xi) \in \widehat{\mathcal{E}}_p$. We endowed $\widehat{\mathcal{E}}_p$ with a topology relatively to the mapping $\mathcal{F}$.

Using the isometry $\mathcal{E}^\nu_p \simeq \mathcal{M}^\nu_p(\mathbb{C}^n)$ from Theorem 1 and the fact that Fourier-images of exponential type functions are finite [13] we can define an inverse transformation by the formula for $p = 1$

$$\mathcal{F}^{-1} : \widehat{\mathcal{E}}_1 \ni \widehat{\varphi}(\xi) \longrightarrow \varphi(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it\cdot\xi}\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi \in \mathcal{E}_1.$$

for $1 < p < \infty$ that is an inverse mapping $\mathcal{F}^{-1} : \widehat{\mathcal{E}}_p \ni \widehat{\varphi}(\xi) \longrightarrow \varphi(t) \in \mathcal{E}_p$.

The duality $\langle \mathcal{E}'_p \mid \mathcal{E}_p\rangle$ defines an adjoint mapping to the inverse one

$$\mathcal{F}^\# := 2\pi(\mathcal{F}^{-1})' : E'_p \ni f \longrightarrow \widehat{f} \in \widehat{E}'_p, \quad \text{where} \quad \langle \widehat{f} \mid \widehat{\varphi}\rangle := (2\pi)^n \langle f \mid \varphi\rangle.$$

Its image $\widehat{\mathcal{E}}'_p$, that generates a duality $\langle \widehat{\mathcal{E}}'_p \mid \widehat{\mathcal{E}}_p\rangle$, we endow with a weak topology that coincides with an inductive topology relatively to $\mathcal{F}^\#$.

We use the symbols $\varphi_-(t) := \varphi(-t)$.

Theorem 5. *For any $f, g \in \mathcal{E}'_p$, $\varphi \in \mathcal{E}_p$, $\psi \in \mathcal{E}_q$, where $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, the Fourier transform has properties $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\psi}$, $\widehat{f \star \varphi} = \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi}_-$, where $\langle \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi}_- \mid \widehat{\psi}\rangle = \langle \widehat{f} \mid \widehat{\varphi}_- \cdot \widehat{\psi}\rangle$ and the space $\widehat{\mathcal{E}}'_p$ is a commutative algebra with respect to the multiplication, that is defined by the relation $\langle \widehat{g} \cdot \widehat{f} \mid \widehat{\varphi}\rangle = \langle \widehat{g} \mid \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi}\rangle$. Moreover, the following equalities $\widehat{g * f} = \widehat{g} \cdot \widehat{f}$, $\widehat{D^k f} = (-\xi)^k \widehat{f}$, $(\forall k \in \mathbb{Z}_+)$ are valid.*

Proof. Using the Corollary 1.1, we have

$$\langle \widehat{f \star \varphi} \mid \widehat{\psi}\rangle = (2\pi)^n \langle f \star \varphi \mid \psi\rangle = (2\pi)^n [(f \star \varphi) \star \psi](0) = (2\pi)^n [f \star (\varphi \star \psi)](0) =$$
$$(2\pi)^n \langle f \mid \varphi \star \psi\rangle = \langle \widehat{f} \mid \widehat{\varphi \star \psi}\rangle = \langle \widehat{f} \mid \widehat{\varphi}_- \cdot \widehat{\psi}\rangle = \langle \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi}_- \mid \widehat{\psi}\rangle.$$

The correctness of definition of the multiplication follows from next equalities

$$\langle \widehat{g \star f} \mid \widehat{\varphi}\rangle = (2\pi)^n \langle g \star f \mid \varphi\rangle = (2\pi)^n [(g \star f) \star \varphi](0) = (2\pi)^n [g \star (f \star \varphi)](0) =$$
$$(2\pi)^n \langle g \mid f \star \varphi\rangle = \langle \widehat{g} \mid \widehat{f \star \varphi}\rangle = \langle \widehat{g} \mid \widehat{f} \cdot \widehat{\varphi}_-\rangle = \langle \widehat{g} \cdot \widehat{f} \mid \widehat{\varphi}_-\rangle.$$

Since $D^k\varphi \in \mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n)$, then $\widehat{(D^k\varphi)}(\xi) = \xi^k \widehat{\varphi}(\xi) \in \widehat{\mathcal{E}}_p(\mathbb{R}^n)$. Hence

$$\langle \widehat{D^k f} \mid \widehat{\varphi}\rangle = (2\pi)^n \langle D^k f \mid \varphi\rangle = (2\pi)^n (-1)^k \langle f \mid D^k\varphi\rangle = (-1)^k \langle \widehat{f} \mid \widehat{D^k\varphi}\rangle =$$
$$(-1)^k \langle \widehat{f} \mid \xi^k \widehat{\varphi}\rangle = \langle (-\xi)^k \widehat{f} \mid \widehat{\varphi}\rangle.$$

□

2 Functional calculus

2.1 Finite functions of the generators of C_0-groups

We construct finite functions of generators of strongly continuous groups of bounded linear operators on an arbitrary Banach space.

Let $\{X, \|\cdot\|\}$ be a complex Banach space, $\mathcal{L}(X)$ be an algebra of linear bounded operators on X with a uniform norm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$ and $U : \mathbb{R}^n \ni t \longrightarrow U_t \in \mathcal{L}(X)$ be an n-parameter C_0–group on X. For every index $j = 1, \ldots, n$ generators are determined by $D_j U_t x|_{t=0} = -A_j x$, where $x \in \mathcal{D}(A_j)$. Let the operators $A_j : \mathcal{D}(A_j) \subset X \longrightarrow X$ be closed and densy determined. We denote $A := (A_1, \ldots, A_n)$. An example: if $U_t = T_t$ and $X = L_p(\mathbb{R}^n)$ then $D_j T_t\varphi = -\partial/\partial t_j T_t\varphi$ for $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

Let us assume

$$\|U_t x\|_q := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|U_t x\|^q\,dt\right)^{1/q}, \quad \|U\|_q := \inf\left\{c : \|U_t x\|_q \le c\,\|x\|,\ x \in X\right\},$$

where $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Let the group satisfies the condition

$$\|U_t x\|_q \le \|U\|_q \|x\| \qquad (\forall x \in X). \tag{6}$$

In the case $p = 1$ the condition (6) is equivalent to a uniform bound of the group. For example, the condition (6) is true for the shift group $U_t = T_t$ on $X = L_p(\mathbb{R}^n)$.

Theorem 6. *Let $\varphi \in \mathcal{E}_p$ and the group U satisfy the condition (6). Then the operators that are defined by the formula*

$$\widehat{\varphi}(A) := \int_{\mathbb{R}^n} U_t \varphi(t)\,dt$$

belong to the Banach algebra $\mathcal{L}(X)$ and satisfies the relation $\widehat{(D_j\varphi)}(A) = A_j\widehat{\varphi}(A)$ ($j = 1, \ldots, n$). If $p = 1$ and the group U_t is uniformly bounded then $\widehat{(\varphi * \psi)}(A) = \widehat{\varphi}(A) \cdot \widehat{\psi}(A)$ $(\forall \widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \in \widehat{E}_1)$.

Proof. Let $\varphi \in \mathcal{E}_p^\nu$. By Theorem 1 and condition (6), we have

$$\|\widehat{\varphi}(A)x\| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|U_t x\| \, |\varphi(t)| \, dt \leq \|U_t x\|_q \, \|\varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu} \leq \|U\|_q \|\varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu} \|x\| \quad (\forall x \in X). \tag{7}$$

It is know ([13],III,3.2.5) that functions $\varphi \in \mathcal{E}_p$ have the property $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$. Then integrating by parts and using the property, that a generator of group is closed, we obtain

$$\widehat{(D_j\varphi)}(A) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} U_t(D_j\varphi)(t)\, dt = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} D_j U_t \varphi(t)\, dt = A_j \widehat{\varphi}(A).$$

For $p = 1$ we determine convolution of functions and next equalities

$$\widehat{\varphi}(A) \cdot \widehat{\psi}(A) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} U_t \varphi(t)\, dt \Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n} U_s \psi(s)\, ds \Big] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) \Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n} U_{s+t}\psi(s)\, ds \Big]\, dt =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n} U_r \varphi(r-s)\psi(s)\, ds \Big]\, dr = \int\limits_{\mathbb{R}^n} U_r \Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(r-s)\psi(s)\, ds \Big]\, dr = \widehat{(\varphi * \psi)}(A)$$

are valid. □

2.2 Functional calculus in algebras of exponential type distributions

We construct the functional calculus as generalized functions for generators of C_0-groups.

Let $X\widetilde{\otimes} L_p(\mathbb{R}^n)$ be a completion of a projective tensor product of X and $L_p(\mathbb{R}^n)$. In the case $p = 1$, as it is known ([16], III, 3.2.5), we have the isometric representation $L_1(\mathbb{R}^n; X) \simeq X\widetilde{\otimes} L_1(\mathbb{R}^n)$, where $L_1(\mathbb{R}^n; X)$ is a Banach space of all X-valued functions $\mathbb{R}^n \ni t \longrightarrow x(t) \in X$ with the norm $\|x\|_{L_1(X)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|x(t)\|\, dt$.

Using the isometric embedding $\mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n) \subset L_p(\mathbb{R}^n)$ for every vector ν we can determine the subspace $\mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X) := X\widetilde{\otimes}\mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n) \subset X\widetilde{\otimes} L_p(\mathbb{R}^n)$. The embeddings $\mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X) \subset \mathcal{E}_p^\mu(\mathbb{R}^n; X)$ $(\nu_1 \leq \mu_1, \dots, \nu_n \leq \mu_n)$ are continuous, then on a union of all these spaces we can define a structure of an inductive limit space

$$\mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n; X) := \bigcup_\nu \mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X) = \lim_\nu \operatorname{ind} \mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X) \subset X\widetilde{\otimes} L_p(\mathbb{R}^n).$$

A convolution of an arbitrary distribution $f \in \mathcal{E}_p'(\mathbb{R}^n)$ and a vector-valued function $x(t) \in \mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n; X)$ is used to define by $(f \star x)(t) := (I \otimes K_f)x(t)$, where I is the identity operator in X.

The topological isomorphism $\lim\limits_\nu \operatorname{ind} \mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X) \simeq X\widetilde{\otimes} \lim\limits_\nu \operatorname{ind} \mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n) = X\widetilde{\otimes}\mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n)$ is valid. This assertion is a corollary of a known property of the inductive limit and a projective tensor products [7]. From this assertion and known Grothendieck's representation ([16], III, §6) it follows that for every function $x(t) \in \mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n; X)$ there is a vector ν such that $x(t)$ belongs to the space $\mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X)$ and is represented in the form of the absolute convergent series

$$x(t) = \sum_{j=1}^\infty x_j \otimes \varphi_j(t), \quad \text{where} \quad x_j \in X, \quad \varphi_j(t) \in \mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n). \tag{8}$$

Using this representation for any distribution $f \in \mathcal{E}_p'(\mathbb{R}^n)$ and a vector-valued function $x(t) \in \mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n; X)$, we obtain $(f \star x)(t) = \sum\limits_{j=1}^\infty x_j \otimes (f \star \varphi_j)(t)$.

Lemma 2.1. *The convolution has properties*

$$(f * g) \star x = f \star (g \star x),$$

$$D^k(f \star x) = f \star (D^k x) = (-1)^{|k|}(D^k f) \star x$$

for any $f, g \in \mathcal{E}_p'(\mathbb{R}^n)$, $x = x(t) \in \mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X)$ *and* $k \in \mathbb{Z}_+^n$.

Proof. From the definition of the convolution and by Theorem 4 next equalities follow

$$(f * g) \star x = \sum_{j=1}^\infty x_j \otimes (f * g) \star \varphi_j = f \star \sum_{j=1}^\infty x_j \otimes (g \star \varphi_j) = f \star (g \star x),$$

$$D^k(f \star x) = \sum_{j=1}^\infty x_j \otimes D^k(f \star \varphi_j) = \sum_{j=1}^\infty x_j \otimes (-1)^{|k|}(D^k f) \star \varphi_j = (-1)^{|k|}(D^k f) \star x.$$

□

Lemma 2.2. *Let the group U satisfies the condition* (6). *Then each of the subspaces*

$$\widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X) := \Big\{ \widehat{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (U_t \otimes I)x(t)\, dt : \ x(t) \in \mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X) \Big\}$$

is a Banach space respectively to the norm induced by the mapping

$$\mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X) \ni x(t) \longrightarrow \widehat{x} \in \widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X).$$

Proof. Let us show that the mapping $\mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X) \ni x(t) \longrightarrow \widehat{x} \in X$ is continuous. From (8) we obtain

$$\widehat{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big[\sum_{j=1}^\infty U_t x_j \otimes \varphi_j(t) \Big] dt = \sum_{j=1}^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} U_t x_j \otimes \varphi_j(t)\, dt = \sum_{j=1}^\infty \widehat{\varphi}_j(A) x_j.$$

From this and using the estimate (7), we have

$$\|\widehat{x}\| \leq \sum_{j=1}^\infty \|x_j\| \, \|\widehat{\varphi_j}(A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|U\|_q \sum_{j=1}^\infty \|x_j\| \, \|\varphi_j\|_{\mathcal{E}_p^\nu}.$$

Using the arbitrary presentation $x(t)$ by absolute convergent series we obtain

$$\|\widehat{x}\| \leq \|U\|_q \, \|x(t)\|_{\mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X)}$$

and the continuity is proved. A kernel of the continuous mapping $\mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X) \longrightarrow X$ is closed then a corresponding factor-space in this kernel is a Banach space. By the definition of the norm in the space $\widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X)$, it is isometric to the constructed factor-space. □

Lemma 2.3. *Let the group U satisfies the condition (6). Then each of the subspaces $\widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X)$ is invariant respectively to the operator*

$$\widehat{K}_f : \widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X) \ni \widehat{x} \longrightarrow \widehat{K}_f \widehat{x} := \int_{\mathbb{R}^n} (U_t \otimes K_f) x(t)\, dt.$$

Proof. Taking into account (8) for elements $x(t) \in \mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X)$ for any $f \in \mathcal{E}_p'(\mathbb{R}^n)$ we obtain

$$\|(I \otimes K_f)x(t)\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|\, \|K_f \varphi_j\|_{\mathcal{E}_p^\nu} \leq \|K_f\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E}_p^\nu)} \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|\, \|\varphi_j\|_{\mathcal{E}_p^\nu}$$

or $\|(I \otimes K_f)x(t)\| \leq \|K_f\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n))} \|x(t)\|_{\mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n;X)}$. Thus the space $\mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X)$ is invariant with respect to the acting operator $I \otimes K_f$.

Since $U_t \otimes K_f = (U_t \otimes I)(I \otimes K_f)$ and $I \otimes K_f : \mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X) \longrightarrow \mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X)$ then by Lemma 2.2 for any vector-valued function $x(t) \in \mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X)$ we have $\widehat{K}_f \widehat{x} \in \widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X)$. Then $\widehat{K}_f : \widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X) \longrightarrow \widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X)$. The lemma is proved. □

The embeddings $\mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X) \subset \mathcal{E}_p^\mu(\mathbb{R}^n; X)$ are continuous. From this it follows that the next embeddings $\widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X) \subset \widehat{\mathcal{E}}_p^\mu(X)$ are also continuous. Then a union of these spaces can be represented as an inductive limit

$$\widehat{\mathcal{E}}_p(X) := \bigcup_\nu \widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X) = \lim_\nu \operatorname{ind} \widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X).$$

Let us define by $\mathcal{L}(\widehat{\mathcal{E}}_p(X))$ an algebra of all linear continuous operators on $\widehat{\mathcal{E}}_p(X)$ with a strong operator topology.

Theorem 7. *Let the group U satisfies the condition (6). Then the mapping $\widehat{\mathcal{E}}_p'(\mathbb{R}^n) \ni \widehat{f} \longrightarrow \widehat{f}(A) \in \mathcal{L}(\widehat{\mathcal{E}}_p(X))$, where the linear operator $\widehat{f}(A)$ is defined by the relation*

$$\widehat{f}(A) : \widehat{\mathcal{E}}_p(X) \ni \widehat{x} \longrightarrow \widehat{f}(A)\widehat{x} := \int_{\mathbb{R}^n} (U_t \otimes K_f)x(t)\, dt \in \widehat{\mathcal{E}}_p(X),$$

is a continuous homomorphism of the algebra of symbols $\widehat{\mathcal{E}}_p'(\mathbb{R}^n)$ onto a subalgebra of algebra $\mathcal{L}(\widehat{\mathcal{E}}_p(X))$ of operators

$$\widehat{K} : \widehat{\mathcal{E}}_p(X) \ni \widehat{x} \longrightarrow \widehat{K}\widehat{x} := \int_{\mathbb{R}^n} (U_t \otimes K)x(t)\, dt\ ,$$

where the operator $K \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_p(\mathbb{R}^n))$ belongs to the commutant of the group T_s. And we have $\widehat{(D_j f)}(A) = A_j \widehat{f}(A)\ (j = 1, \dots, n)$.

Proof. From Theorem 4 and Corollary 1.1 any operator, that belongs to a commutant of group T_s, has the form K_f, where $f \in \mathcal{E}_p'(\mathbb{R}^n)$. From Lemma 2.3 and the definition of the space $\widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X)$ it follows that $\widehat{K}_f : \widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X) \longrightarrow \widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X)$ for every ν. From the definition of the norm in $\widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X)$ we have $\widehat{x}_m \to \widehat{x}$ if and only if $x_m(t) \to x(t)$ in the space $\mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X)$. If $x_m(t) \to x(t)$ then from continuity of K_f it follows, that $(I \otimes K_f)x_m(t) \to (I \otimes K_f)x(t)$ in the space $\mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X)$. From this by the definition of the norm in the space $\widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X)$ we obtain $(I \otimes K_f)x_m(t) \to (I \otimes K_f)x(t)$. Thus, $\widehat{K}_f \in \mathcal{L}(\widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X))$ for any ν and therefore $\widehat{K}_f \in \mathcal{L}(\widehat{\mathcal{E}}_p(X))$.

From the equality $K_{f*g} = K_f \cdot K_g$ for arbitrary $f, g \in \mathcal{E}_p'(\mathbb{R}^n)$ it follows $\widehat{K}_{f*g} = \widehat{K}_f \cdot \widehat{K}_g$. Thus, the functional calculus is an algebraic homomorphism from the convolution algebra of distribution onto an algebra of continuous operators on the space $\widehat{\mathcal{E}}_p(X)$.

We now prove a continuity of the functional calculus. As in the space $\widehat{\mathcal{E}}_p'(\mathbb{R}^n)$ a topology is inducted from $\mathcal{E}_p'(\mathbb{R}^n)$, and the space $\mathcal{E}_p'(\mathbb{R}^n)$ is given a weak topology, then it is enough to show a continuity of the mapping $\mathcal{E}_p'(\mathbb{R}^n) \ni f \longrightarrow \widehat{f}(A)\widehat{x} \in \widehat{\mathcal{E}}_p(X)$ for every $\widehat{x} \in \widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X)$. The continuity of $\mathcal{E}_p'(\mathbb{R}^n) \ni f \longrightarrow K_f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n))$ we obtain from $\|f \star \varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu} \leq \|f_\nu\|\, \|\varphi\|_{\mathcal{E}_p^\nu}$, where f_ν is a restricted functional on the subspace $\mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n)$. Then it will be continuous the mapping $\mathcal{E}_p'(\mathbb{R}^n) \ni f \longrightarrow (I \otimes K_f)x(t) \in \mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X)$ for every $x(t) \in \mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X)$. Let $f_m \to f$ in the space $\mathcal{E}_p'(\mathbb{R}^n)$. Then $(I \otimes K_{f_m})x(t) \to (I \otimes K_f)x(t)$ in the space $\mathcal{E}_p^\nu(\mathbb{R}^n; X)$. By the definition of the norm in $\widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X)$, we have $\widehat{K}_{f_m}\widehat{x} \to \widehat{K}_f\widehat{x}$ in the space $\widehat{\mathcal{E}}_p^\nu(X)$. Thus, the mapping $\mathcal{E}_p'(\mathbb{R}^n) \ni f \longrightarrow \widehat{K}_f\widehat{x} \in \widehat{\mathcal{E}}_p(X)$ is continuous.

The rest assertions of the theorem follow from Lemmas 2.1, 2.3 and Theorem 6. The theorem is proved. □

Thus, we found the integral image of the Fourier operator transform in a case of the algebra of linear continuous functionals on a space of entire function of exponential type, that on the real subspace belongs to $L_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$. We also established its multiplicate properties relatively to the convolution and described its image by way of commutant of the scalar many-parameter shift group.

REFERENCES

1. Akhiezer N. Lectures on the Theory of Approximation, Moscow, 1965.
2. Balakrishnan A.V. *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them*, Pacific J. Math., **10**, 2 (1960), 419–439.
3. Bogolyubov N.N., Shyrkov D.V. Introduction in the Theory of Quantum Fields, Moscow, 1984.
4. Bogolyubov N.N., Logunov A.A., Todorov I.T. Basis of Axiomatic Approach in Quantum Field Theory, Moscow, 1969.
5. Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V. *Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum*, General topology in Banach spaces. – Huntington, New York: NOVA Sci. Publ., (2001), 137–145.
6. Gorbachuk M.L., Gorbachuk V.I. *On the approximation of smooth vectors of a closed operator by entire vectors of exponential type*, Ukr. Math. Journal., **47**, 5 (1995), 616–628.
7. Grothendieck A. *Produits tensoriels topologiques et espases nucleaire*, Mem. Amer. Math. Soc., 16 (1955), 1–140.
8. Hille E., Phillips R. Functional Analysis and Semi-Groups. AMS, 1957.
9. Iosida K. Functional Analysis. Springer–Verlag, 1965.
10. Lopushansky O.V. *Operator calculus on ultrasmooth vectors*, Ukr. Math. Journal, **44**, 4 (1992), 502–513.

11. Lopushansky O.V., Lozynska V.Ya. *Analytic distributions of exponential type*, Mathematical Methods and Physicomechanical fields. **42**, 4 (1999), 46–55.

12. Lyubich Yu.I., Matsaev V.I. *Operators with a Separable Spectrum*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), **47** (1965), 89–129.

13. Nikolsky S.M. Approximation of Functions of Several Variables and Embeddings Theorems, Moscow, 1977.

14. Radyno Ya.V. *Vectors of exponential type in operator calculus and differential equations*, Differential equations, **21**, 9 (1985), 1559–1569.

15. Radzievsky G.V. *Direct and inverse theorems in problems of approximation by vectors of finite degree*, Math.Sb., **189**, 4 (1998), 83–124.

16. Schaefer H. Topological Vector Spaces, Moscow, 1971.

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine,
Lviv, Ukraine

Received 20.11.2009

Revised 15.02.2011

Лозинська В.Я. *Розподіли експоненціального типу і узагальнене функціональне числення для генераторів C_0-груп* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 73–84.

Описано властивості простору спряженого до простору цілих функцій експоненціального типу багатьох комплексних змінних, що на дійсному підпросторі належать до $L_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$. У Фур'є-образі цього простору побудовано функціональне числення для генераторів сильно неперервних груп обмежених лінійних операторів, що діють на довільному банаховому просторі.

Лозинская В.Я. *Распределения экспоненциального типа и обобщенное функциональное исчисление для генераторов C_0-групп* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 73–84.

Описаны свойства сопряженного пространства к пространству целых функций экспоненциального типа многих комплексных переменных, которые на действительном подпространстве принадлежат к $L_p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$. В Фурье–образе этого пространства построено функциональное исчисление для генераторов сильно непрерывных груп ограниченных линейных операторов, которые действуют на произвольном банаховом пространстве.

Карпатські математичні публікації. Т.3, №1 | Carpathian Mathematical Publications. V.3, №1

УДК 517.95

Лопушанський А.О.[1], Лопушанська Г.П.[2], Пасічник О.В.[2]

СЛІДИ РОЗВ'ЯЗКІВ ПІВЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ ЗА ЧАСОМ

Лопушанський А.О., Лопушанська Г.П., Пасічник О.В. *Сліди розв'язків півлінійних рівнянь з дробовою похідною за часом* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 85–93.

Знайдено достатні умови існування узагальнених початкових значень регулярних в області розв'язків півлінійних рівнянь дифузії при збуреннях дробової похідної за часом.

Вступ

Багато властивостей розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними поширюється на випадок рівнянь із псевдодиференціальними операторами, зокрема рівнянь з дробовими похідними (наприклад, [1], [5], [8], [14], [16], [9], [19]).

У працях [4], [6]-[7], [12], [13], [15], [10] та інших досліджувались узагальнені крайові значення регулярних в області розв'язків лінійних, а в [11] — і півлінійних гіпоеліптичних рівнянь з частинними похідними. Доведено, що такі розв'язки належать до вагових просторів Лебега з вагами порядків степенів відстані від точки області до межі (степінь залежить від характеру сингулярностей узагальнених крайових значень таких розв'язків) і розв'язки з певних вагових L_p-просторів набувають на межі узагальнених крайових значень.

У роботі встановлено подібний результат для півлінійних рівнянь з дробовою похідною за часом.

1 Основні позначення та допоміжні твердження

Нехай $Q_T = \{(x,t) : x \in R, \ t \in (0,T]\}$, $L_{1,loc}(Q_T)$ — простір функцій, інтегровних у кожній обмеженій області, розміщеній строго всередині Q_T, $D(R) = C_0^\infty(R)$, $D(Q_T) =$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35K55.
Ключові слова і фрази: півлінійне рівняння, узагальнена функція, ваговий функційний простір, згортка, похідна дробового порядку.

$C_0^\infty(Q_T)$, $D(\bar{Q}_T) = C_0^{\infty,(0)}(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in C_0^\infty(\bar{Q}_T) : D_t^l\varphi\,|_{t=T} = 0,\ l = 0,1,2,\dots\}$ — простір нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в $\bar{Q}_\tau$, $\tau < T$, $D'(R)$, $D'(Q_T)$ — простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на просторах $D(R)$, $D(Q_T)$ [3], [17], (f,φ) — значення узагальненої функції $f \in D'(R^n)$ на основній функції $\varphi \in D(R^n)$, $n = 1,2$.

Через $\hat{*}$ позначаємо операцію згортки узагальненої функції g з основною функцією φ ([17, с.111])

$$(g\hat{*}\varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x+\xi)), \quad g \in D'(R), \quad \varphi \in D(R).$$

Зауважимо, що $f(x)\hat{*}\varphi(x) = f(-x) * \varphi(x)$ ([3, с.80]).

Функціонал $f * g \in D'(R)$, який діє за правилом $(f * g, \varphi) = (f, g\hat{*}\varphi)$, $\forall\varphi \in D(R)$, називається згорткою узагальнених функцій f та g ([17, с.111]).

Для $f, g \in D'(R)$, $\varphi \in D(R)$ при існуванні $f*g$ правильна рівність $(f*g)\hat{*}\varphi = f\hat{*}(g\hat{*}\varphi)$. Справді,

$$((f*g)\hat{*}\varphi)(x) = ((f*g)(\xi), \varphi(x+\xi)) = (f(y), (g(\xi), \varphi(x+\xi+y)) =$$

$$(f(y), (g\hat{*}\varphi)(x+y)) = (f\hat{*}(g\hat{*}\varphi))(x).$$

Також використовуємо той факт, що при $f, g \in L_{1,loc}(R) \bigcap D'_+(R)$, $\varphi \in D(R)$ правильною є рівність $f\hat{*}(g*\varphi) = g*(f\hat{*}\varphi)$.

Через $D'_+(R)$ позначають простір узагальнених функцій із $D'(R)$, які дорівнюють нулю при $t < 0$ ([3, ст.87]). Простір $D'_+(R)$ є асоціативною та комутативною алгеброю, якщо за операцію множення взяти операцію згортки, одиницею в $D'_+(R)$ є δ-функція: $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

Використовуємо функцію $f_\lambda \in D'_+(R)$, яка залежить від числового параметра λ і є такою, що $f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ при $\lambda > 0$ та $f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t)$ при $\lambda \le 0$, де $\theta(t)$ — функція Хевісайда, $\Gamma(\lambda)$ — гамма-функція ([3, с.87]). Справедливими будуть співвідношення

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu} \ ([3, c.87]), \quad f_\lambda\hat{*}f_\mu = f_{\lambda+\mu} \ ([2, c.145]).$$

При $\lambda > 0$ оператор згортки $(f_{-\lambda}*)$ в алгебрі $D'_+(R)$ називають оператором дробового диференціювання (Рімана-Ліувілля), а оператор $(f_{-\lambda}\hat{*})$ — оператором дробового диференціювання Вейля ([2, с.133]).

Нехай $\alpha \in (0;1)$. Для $v \in D(\bar{Q}_T)$ визначено

$$f_{-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t) = f'_{1-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t) = -f_{1-\alpha}(t)\hat{*}v_t(x,t) =$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^T \frac{v_\eta(x,\eta)}{(\eta-t)^\alpha}d\eta = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_t^T \frac{v(x,\eta)}{(\eta-t)^\alpha}d\eta, \quad (x,t) \in Q_T.$$

У [18] введено регуляризовану похідну $D_t^\alpha v$ функції v порядку $\alpha \in (0;1)$

$$D_t^\alpha v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau - f_{1-\alpha}(t)v(x,0), \quad (x,t) \in Q_T.$$

Зауважимо, що за умови існування неперервної функції $v_t(x,t)$, $(x,t) \in Q_T$,

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{v_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau - f_{1-\alpha}(t)v(x,0), \ (x,t) \in Q_T([2, c.135]).$$

Нехай $\varepsilon_0 \in (0,T]$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, $Q_{T,\varepsilon} = \{(x,t) \in Q_T : \varepsilon < t \le T\}$.

Позначаємо через $C^{2,\alpha}(Q_T)$ клас функцій $v(x,t)$, $(x,t) \in Q_T$, неперервних, обмежених, двічі неперервно диференційовних за змінною x в Q_T, рівних нулю при $t > T$, для яких при кожному $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ існують неперервні в $Q_{T,\varepsilon}$ функції

$$(f_{-\alpha}(t) * v(x,t))^\varepsilon = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_\varepsilon^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau - f_{1-\alpha}(t-\varepsilon)v(x,\varepsilon).$$

Зауважимо, що за умови існування неперервної $v_t(x,t)$, $(x,t) \in Q_T$ маємо

$$(f_{-\alpha}(t) * v(x,t))^\varepsilon = \int_\varepsilon^t f_{1-\alpha}(t-\tau)v_\tau(x,\tau)d\tau.$$

Введемо оператори:

$\hat{L}_\alpha : \quad (\hat{L}_\alpha v)(x,t) \equiv f_{-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t) - v_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \bar{Q}_T, \quad v \in D(\bar{Q}_T)$,

$L_\alpha^\varepsilon : \quad (L_\alpha^\varepsilon v)(x,t) \equiv (f_{-\alpha}(t) * v(x,t))^\varepsilon - v_{xx}(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (\varepsilon, T], \quad v \in C^{2,\alpha}(Q_T)$,

$L_\alpha^{reg} : \quad (L_\alpha^{reg}v)(x,t) \equiv D_t^\alpha v(x,t) - v_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \bar{Q}_T, \quad v \in C^{2,\alpha}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$.

Зауважимо, що для $v \in C^{2,\alpha}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$ визначено $(f_{-\alpha}(t) * v(x,t))^0 = D_t^\alpha v(x,t)$, а, отже, $L_\alpha^0 v = L_\alpha^{reg} v$ для $v \in C^{2,\alpha}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$.

Нехай $\rho(t)$ — нескінченно диференційовна невід'ємна на $[0;T]$, додатна на $(0;T]$ функція, яка має порядок $t^{\frac{\alpha}{2}}$ при $t \to 0$ ($\lim\limits_{t\to 0+} \frac{\rho(t)}{t^{\frac{\alpha}{2}}} = const$) та $\rho_1(t) \le 1$ при $t \in [0;T]$. Прикладом є така функція: $\rho \in C^\infty[0,T]$, що $\rho(t) = t^{\frac{\alpha}{2}}$ при $t \in [0, \frac{\varepsilon_0}{2}]$, $\rho(t) = 1$ при $t \in (\varepsilon_0, T]$, $\varepsilon_0 \in (0,T)$, $0 \le \rho_1(t) \le 1$ при $t \in [0;T]$. Її існування випливає з леми в [3, с.18].

Вводимо ваговий функційний простір

$$M_k(Q_T) = \{u \in L_{1,loc}(Q_T) : \ \|u\|_k = \int_{Q_T} \rho^k(t)|u(x,t)|dxdt < +\infty\}, \quad k \in N\bigcup\{0\}.$$

Зауважимо, що $M_0(Q_T) = L_1(Q_T)$.

Використовуємо функційні простори $D_k(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in D(\bar{Q}_T) : \ \rho^{-k}\varphi \in C(Q_T)\}$, $X_k(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in D(\bar{Q}_T) : \hat{L}_\alpha\varphi \in D_k(\bar{Q}_T)\}$.

Вважаємо, що $\varphi_l \to 0$, при $l \to \infty$ у $D_k(\bar{Q}_T)$, якщо $\varrho^{-k}\varphi_l \to 0$, при $l \to \infty$ рівномірно в $\bar{Q}_T$. Відповідно визначено збіжність $\varphi_l \to 0$, при $l \to \infty$ у $X_k(\bar{Q}_T)$: $\varphi_l \to 0$ та $\varrho^{-k}\hat{L}_\alpha\varphi_l \to 0$, $l \to \infty$ рівномірно в $\bar{Q}_T$.

Лема 1.1. *Для довільних числа $m \in N \cup \{0\}$, функції $\varphi \in D(R)$ існують такі функції $\psi_i \in X_m(\bar{Q}_T)$, $i = 1,2$, що $\psi_1(x,0) = \varphi(x)$, $(f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_2(x,t))_{t=0} = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.*

Доведення. Розглянемо функцію $\psi(x,t) = f_\gamma(t)\hat{*}\Big(\sum\limits_{i=0}^{m} f_{\frac{i\alpha}{2}}(t) * \varphi_i(x,t)\Big)$, де $\gamma \in (-1,0]$, $\varphi_i \in D(\bar{Q}_T)$, $i=\overline{0,m}$, $\varphi_0(x,0)=\varphi(x)$, а φ_i при $i=\overline{1,m}$ будуть нижче визначатись через φ_0. Застосовуючи вищезазначені властивості згорток, матимемо

$$(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t) = f_{\gamma-\alpha}(t)\hat{*}\Big(\sum_{i=0}^{m} f_{\frac{i\alpha}{2}}(t) * \varphi_i(x,t)\Big) - f_\gamma(t)\hat{*}\Big(\sum_{i=0}^{m} f_{\frac{i\alpha}{2}}(t) * \varphi_{ixx}(x,t)\Big) =$$

$$\sum_{i=0}^{m} f'_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}(f_{\frac{i\alpha}{2}}(t) * \varphi_i(x,t)) - f_\gamma(t)\hat{*}\Big(\sum_{i=0}^{m} f_{\frac{i\alpha}{2}}(t) * \varphi_{ixx}(x,t)\Big) =$$

$$f'_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}\varphi_0(x,t) - \sum_{i=1}^{m} f_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}(f_{\frac{(i-1)\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}-1}(t) * \varphi_i(x,t)) -$$

$$f_\gamma(t)\hat{*}\Big(\sum_{i=0}^{m} f_{\frac{i\alpha}{2}}(t) * \varphi_{ixx}(x,t)\Big) = -f_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}\varphi_{0t}(x,t) -$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} f_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}\Big(f_{\frac{j\alpha}{2}}(t) * f_{\frac{\alpha}{2}-1}(t) * \varphi_{j+1}(x,t)\Big) - f_\gamma(t)\hat{*}\Big(\sum_{j=0}^{m} f_{\frac{j\alpha}{2}}(t) * \varphi_{jxx}(x,t)\Big) =$$

$$-f_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}\varphi_{0t}(x,t) - f_{\frac{m\alpha}{2}}(t) * \Big(f_\gamma(t)\hat{*}\varphi_{mxx}(x,t)\Big) -$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} f_{\frac{j\alpha}{2}}(t) * \Big(f_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}(f_{\frac{\alpha}{2}-1}(t) * \varphi_{j+1}(x,t)) + f_\gamma(t)\hat{*}\varphi_{jxx}(x,t)\Big) =$$

$$-f_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}[\varphi_{0t}(x,t) + f_{\frac{\alpha}{2}-1}(t) * \varphi_1(x,t)] - f_\gamma(t)\hat{*}\varphi_{0xx}(x,t) -$$

$$\sum_{j=1}^{m-1} f_{\frac{j\alpha}{2}}(t) * \Big(f_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}(f_{\frac{\alpha}{2}-1} * \varphi_{j+1}(x,t)) + f_\gamma(t)\hat{*}\varphi_{jxx}(x,t)\Big) - f_{\frac{m\alpha}{2}}(t) * \Big(f_\gamma(t)\hat{*}\varphi_{mxx}(x,t)\Big).$$

Вибираємо $f_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}[\varphi_{0t}(x,t) + f_{\frac{\alpha}{2}-1}(t) * \varphi_1(x,t)] + f_\gamma(t)\hat{*}\varphi_{0xx}(x,t) = 0,$

$$f_{1-\alpha+\gamma}(t)\hat{*}(f_{\frac{\alpha}{2}-1} * \varphi_{j+1}(x,t)) + f_\gamma(t)\hat{*}\varphi_{jxx}(x,t), \quad j=\overline{1,m-1},$$

тобто

$$\varphi_{0t}(x,t) + f_{\frac{\alpha}{2}-1}(t) * \varphi_1(x,t) + f_{\alpha-1}(t)\hat{*}\varphi_{0xx}(x,t) = 0,$$

$$f_{\frac{\alpha}{2}-1}(t) * \varphi_{j+1}(x,t) + f_{\alpha-1}(t)\hat{*}\varphi_{jxx}(x,t) = 0, \quad j=\overline{1,m-1},$$

звідки визначаємо $\varphi_j \in D(\bar{Q}_T)$, $j=\overline{1,m}$:

$$\varphi_1(x,t) = f_{1-\frac{\alpha}{2}}(t) * [f_\alpha(t)\hat{*}\varphi_{0xxt}(x,t) - \varphi_{0t}(x,t)],$$

$$\varphi_{j+1}(x,t) = f_{1-\frac{\alpha}{2}}(t) * [f_\alpha(t)\hat{*}\varphi_{jxxt}(x,t)], \quad j=\overline{1,m-1}.$$

Тоді $(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t) = -f_{\frac{m\alpha}{2}}(t) * \Big(f_\gamma(t)\hat{*}\varphi_{mxx}(x,t)\Big)$.

Оскільки функція $\hat{\varphi}_m(x,t) = -f_\gamma(t)\hat{*}\varphi_{mxx}(x,t) = f_{\gamma+1}(t)\hat{*}\varphi_{mxxt}(x,t)$ належить $D(\bar{Q}_T)$ (а, отже, обмежена в $\bar{Q}_T$), то стає зрозуміло, що

$$\rho^{-m}(t)\hat{L}_\alpha\psi(x,t) = \rho^{-m}(t)(f_{\frac{m\alpha}{2}}(t) * \hat{\varphi}_m(x,t)) = \frac{\rho^{-m}(t)}{m!}\int_0^t (t-\tau)^{\frac{m\alpha}{2}-1}\hat{\varphi}_m(x,\tau)d\tau$$

є неперервною функцією в $\bar{Q}_T$.

При $\gamma=0$ матимемо шукану функцію $\psi_1(x,t)$, а при $\gamma=\alpha-1$ — функцію $\psi_2(x,t)$. Справді, за побудовою

$$\psi_1(x,0) = \sum_{i=0}^{m}(f_{\frac{i\alpha}{2}}(t) * \varphi_i(x,t))_{t=0} = (f_0(t) * \varphi_0(x,t))_{t=0} + \sum_{i=1}^{m}(f_{\frac{i\alpha}{2}}(t) * \varphi_i(x,t))_{t=0} =$$

$$(\delta(t) * \varphi_0(x,t))_{t=0} = \varphi_0(x,0) = \varphi(x),$$

$$(f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_2(x,t))|_{t=0} = \Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\Big(f_{\alpha-1}(t)\hat{*}\sum_{i=0}^{m}(f_{\frac{i\alpha}{2}}(t) * \varphi_i(x,t))\Big)\Big]\Big|_{t=0} =$$

$$\sum_{i=0}^{m}(f_{\frac{i\alpha}{2}}(t) * \varphi_i(x,t))|_{t=0} = \varphi_0(x,0) = \varphi(x). \qquad \square$$

2 Узагальнені початкові значення регулярних розв'язків

Означення 2.1. *Кажуть ([17, с.46]), що узагальнена функція $f \in D'(\mathbb{R})$ має порядок сингулярності $s(f) \le p$, якщо*

$$(f,\varphi) = \sum_{i=0}^{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^{(i)}(x)f_i(x)dx \quad \forall\varphi \in D(\mathbb{R}), \quad f_i \in L_{1,loc}(\mathbb{R}), \quad i=\overline{0,p}.$$

Нехай $C^p[a,b]$ — банахів простір p раз неперервно диференційовних функцій на відрізку $[a,b]$ з нормою $||\varphi||_{C^p[a,b]} = ||\varphi||'_p = \max\limits_{0\le i\le p}\sup\limits_{x\in[a,b]}|(\frac{\partial}{\partial x})^i\varphi(x)|$, $C_0^p(\mathbb{R})$ — простір функцій із $C^p(R)$ з компактними носіями на R, $C_0^p[a,b] = \{\varphi \in C_0^p(\mathbb{R}) : supp\varphi \subset [a,b]\}$.

Згідно з означенням порядку узагальненої функції в [3], теоремою 3 з [3], с. 22 та зауваженням на с. 23, узагальнена функція $f \in D'(\mathbb{R})$ має порядок $\le p$, якщо існує додатна стала K, така що для довільного відрізка $[a,b]$, довільної $\varphi \in C_0^\infty[a,b]$

$$|(f,\varphi)| \le K||\varphi||_{C^p[a,b]}. \tag{1}$$

Зрозуміло, що для узагальненої функції f із $s(f)\le p$ в сенсі [17, с.46], виконується (1) і навпаки, із (1) випливає, що $s(f)\le p$ в сенсі означення з [17]. Така $f \in (C_0^p(\mathbb{R}))'$.

Теорема 1. *Нехай функція $g(x,t,z)$ ($(x,t)\in Q_T$, $z\in R$) — неперервна, функції $u^\varepsilon \in C^{2,\alpha}(Q_{T,\varepsilon})$ є розв'язками рівнянь*

$$(L_\alpha^\varepsilon u)(x,t) = g(x,t,u(x,t)), \quad (x,t)\in Q_{T,\varepsilon}, \tag{2}$$

існує така $u \in M_k(Q_T)$, що:

1) $u^\varepsilon \to u$ *в* $M_k(Q_T)$ *при* $\varepsilon \to 0$,

2) $\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} g(x,t,u^\varepsilon(x,t))dxdt \to \int\limits_{Q_T} g(x,t,u(x,t))dxdt, \quad \varepsilon \to 0.$

Тоді $u^\varepsilon(x,\varepsilon)$ *набувають при* $\varepsilon = 0$ *деяких узагальнених початкових значень* $u_0 \in D'(R)$ *порядку сингулярності* $\le 2k+2$, *а саме, існує така* $u_0 \in D'(R)$, $s(u_0) \le 2k+2$, *що*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\varphi(x)dx = (u_0,\varphi) \quad \forall\varphi \in D(R). \tag{3}$$

Доведення. Для довільної $\psi \in X_k(\bar{Q}_T)$ визначимо $\psi_\varepsilon(x,t) = \psi(x,t-\varepsilon)$, $t \in [\varepsilon, T+\varepsilon]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0/2]$. Тоді $\psi_\varepsilon(x,t) \to \psi(x,t)$ та $\varrho^{-k}(t-\varepsilon)(\hat{L}_\alpha\psi_\varepsilon)(x,t) \to \varrho^{-k}(t)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)$, $\varepsilon \to 0$ рівномірно в $\bar{Q}_T$ ($\psi_\varepsilon \to \psi$ в $X_k(\bar{Q}_T)$).

В області $Q_{T,\varepsilon}$ для $v \in C^{2,\alpha}(Q_T)$ та вибраної ψ_ε правильною буде формула Гріна

$$\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}}(L^\varepsilon_\alpha v)(x,t)\psi_\varepsilon(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} v(x,t)(\hat{L}_\alpha\psi_\varepsilon)(x,t)dxdt - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(x,\varepsilon)\Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t)\Big]\Big|_{t=\varepsilon}dx. \tag{4}$$

Справді,

$$\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} v(x,t)(\hat{L}_\alpha\psi_\varepsilon)(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} v(x,t)\Big(f_{-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t) - \psi_{\varepsilon xx}(x,t)\Big)dxdt;$$

$$\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} v(x,t)\Big(f_{-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t)\Big)dxdt = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_\varepsilon^T v(x,\tau)\Big(f_{1-\alpha}(\tau)\hat{*}\frac{\partial\psi_\varepsilon(x,\tau)}{\partial\tau}\Big)d\tau =$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_\varepsilon^{T+\varepsilon}\Big(\int\limits_\varepsilon^t f_{1-\alpha}(t-\tau)v(x,\tau)d\tau\Big)\frac{\partial\psi_\varepsilon(x,t)}{\partial t}dt =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_\varepsilon^T\Big(\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\varepsilon^t f_{1-\alpha}(t-\tau)v(x,\tau)d\tau\Big)\psi_\varepsilon(x,t)dt =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_\varepsilon^T\psi_\varepsilon(x,t)(f_{-\alpha}(t)*v(x,t))^\varepsilon dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}v(x,\varepsilon)dx\int\limits_\varepsilon^{T+\varepsilon}f_{1-\alpha}(t-\varepsilon)\psi_\varepsilon(x,t)dt.$$

Також

$$\int\limits_{Q_T} v(x,t)\psi_{\varepsilon xx}(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} v_{xx}(x,t)\psi_\varepsilon(x,t)dxdt,$$

$$\int\limits_\varepsilon^{T+\varepsilon} f_{1-\alpha}(t-\varepsilon)\psi_\varepsilon(x,t)dt = \Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t)\Big]\Big|_{t=\varepsilon} = \int\limits_0^T f_{1-\alpha}(t)\psi(x,t)dt = \Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi(x,t)\Big]\Big|_{t=0}.$$

Враховуючи ці перетворення, будемо мати формулу (4).

Нехай функція $u^\varepsilon \in C^{2,\alpha}(Q_{T,\varepsilon})$ і є розв'язком рівняння (2) в $Q_{T,\varepsilon}$. Із формули (4) для $v = u^\varepsilon$ та побудованої вище ψ_ε маємо

$$\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} u^\varepsilon(x,t)(\hat{L}_\alpha\psi_\varepsilon)(x,t)dxdt - \int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} g(x,t,u^\varepsilon(x,t))\psi_\varepsilon(x,t)dxdt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\Big[f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t)\Big]\Big|_{t=\varepsilon}dx. \tag{5}$$

Виберемо тепер $\psi_\varepsilon(x,t)$ за функцією $\psi_2(x,t)$, визначеною лемою 1.1 для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R})$ при $m = k$. Тоді за лемою 1.1

$$(f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_\varepsilon(x,t))\,|_{t=\varepsilon} = (f_{1-\alpha}(t)\hat{*}\psi_2(x,t))\,|_{t=0} = \int\limits_0^T f_{1-\alpha}(t)\psi_2(x,t)dt = \varphi(x). \tag{6}$$

$$(\hat{L}_\alpha\psi_\varepsilon)(x,t) = \varrho^k(t-\varepsilon)\cdot\varrho^{-k}(t-\varepsilon)(\hat{L}_\alpha\psi_\varepsilon)(x,t) = \varrho^k(t-\varepsilon)\cdot\tilde{\varphi}_\varepsilon(x,t),$$

де функція $\tilde{\varphi}_\varepsilon(x,t)$ — нескінченно диференційовна й обмежена в $Q_{T,\varepsilon}$, а за побудовою $\tilde{\varphi}_\varepsilon \to \tilde{\varphi}$, $\varepsilon \to 0$ у $D(\bar{Q}_T)$.

За умовою 1 теореми послідовність функціоналів $\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} u^\varepsilon(x,t)\varrho^k(t)\cdot\tilde{\varphi}(x,t)dxdt$ обмежена та існує $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} u^\varepsilon(x,t)\varrho^k(t)\cdot\tilde{\varphi}(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} u(x,t)\varrho^k(t)\cdot\tilde{\varphi}(x,t)dxdt$. Тоді за властивістю збіжної послідовності узагальнених функцій $u^\varepsilon(x,t)$ (лема з [17, с.70]) існує

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} u^\varepsilon(x,t)\varrho^k(t-\varepsilon)\cdot\tilde{\varphi}_\varepsilon(x,t)dxdt = \lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} u^\varepsilon(x,t)\lim_{\varepsilon\to0}\Big(\varrho^k(t-\varepsilon)\cdot\tilde{\varphi}_\varepsilon(x,t)\Big)dxdt =$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} u^\varepsilon(x,t)\varrho^k(t)\cdot\tilde{\varphi}(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} u(x,t)\varrho^k(t)\cdot\tilde{\varphi}(x,t)dxdt.$$

З умови 2 теореми так само одержуємо існування границі

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} g(x,t,u^\varepsilon(x,t))\psi_\varepsilon(x,t)dxdt = \lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} g(x,t,u^\varepsilon(x,t))(\lim_{\varepsilon\to0}\psi_\varepsilon(x,t))dxdt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{Q_{T,\varepsilon}} g(x,t,u^\varepsilon(x,t))\psi(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_{T,0}} g(x,t,u(x,t))\psi(x,t)dxdt.$$

В (5) при вибраній $\psi_\varepsilon(x,t)$ за функцією $\psi_2(x,t)$ спрямуємо ε до нуля. Зі встановленого вище існування границі при $\varepsilon \to 0$ лівої частини рівності (5), а отже, й правої, та із (6) випливає існування $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi \in D(\mathbb{R})$.

Введемо функціонал u_0 на $D(R)$ наступним чином $(u_0,\varphi) = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^\varepsilon(x,\varepsilon)\varphi(x)dx$, $\forall\varphi \in D(\mathbb{R})$. Очевидно, він — лінійний. З формули (5) випливає, що

$$(u_0,\varphi) = \int\limits_{Q_T} u(x,t)(\hat{L}_\alpha\psi_2)(x,t)dxdt - \int\limits_{Q_T} g(x,t,u(x,t))\psi_2(x,t)dxdt. \tag{7}$$

З доведення леми 1.1 видно, що вибрана функція ψ_2 є лінійною функцією похідних допоміжної функції φ_0 за змінною x до порядку $2k$ та за змінною t до порядку k, а $\rho^{-k}(t)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t) = \tilde{\varphi}(x,t)$, де $\tilde{\varphi}$ лінійно виражається через функцію φ_0 та її похідні за x до порядку $2k+2$ та за t до порядку $k+1$. Функція φ_0 є довільним продовженням функції φ з $D(R)$ до функції із $D(\bar{Q}_T)$, таким що $\varphi_0(x,0) = \varphi(x)$. Можна вибрати $\varphi_0(x,t) = \eta(t)\cdot\varphi(x)$, де $\eta \in C^\infty[0,T]$, $\eta(t) = 1$ для $t \in [0, \varepsilon_0/2]$, $\eta(t) = 0$ для $t \in [\varepsilon_0, T]$.

Нехай $[a,b] = supp\varphi$, $B = [a,b]\times[0,T]$. Тоді $\sup\limits_B|\psi| \le C\|\varphi\|'_{2k}$, $\hat{L}_\alpha\psi(x,t) = \rho^k(t)\tilde{\varphi}(x,t)$ та $\sup\limits_B|\tilde{\varphi}| \le \tilde{C}\|\varphi\|'_{2k+2}$, де $C, \tilde{C}$ — додатні сталі.

Тепер із (7) одержуємо, що для довільної $\varphi \in D(R)$

$$|(u_0,\varphi)| \le \tilde{C}\|u\|_k \cdot \|\varphi\|'_{2k+2} + \tilde{C}\int\limits_{Q_T}|g(x,t,u(x,t))|dxdt \cdot \|\varphi\|'_{2k} \le \hat{C}\|\varphi\|'_{2k+2},$$

де $\hat{C} = \hat{C}(u,k)$ — додатна стала. Отже, функціонал u_0 — неперервний на $C_0^{2k+2}(\mathbb{R})$. Згідно з означенням порядку сингулярності узагальненої функції, $s(u_0) \le 2k+2$. $\square$

Одержаний результат поширюється на випадок рівняння

$$f_{-\alpha}(t) * u = A(x,D)u + g(x,t,u), \quad (x,t) \in R^n \times (0;T],$$

де $A(x,D)$ — лінійний еліптичний диференціальний вираз другого порядку з нескінченно диференційовними коефіцієнтами в R^n.

Література

1. Агранович М.С. *Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы* // Успехи матем. наук. — 1965. — Т.20, №5. — С. 3–120.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций (Серия: СМБ). — М.: Наука, 1970. — 328 с.
3. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике — М.: Наука, 1979. — 320 с.
4. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. *О начальных данных гладких решений некоторых классов параболических уравнений* // Успехи мат. наук. — 1979. — Т.34, №4. — С. 164.
5. Городецкий В.В., Дринь Я.М. Параболические псевдодифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций // Препр. АН Украины. Ин-т прикл. пр. мех. и мат. №4–91. — Львов, 1991. — 57 с.
6. Грушин В.В. *О поведении решений дифференциальных уравнений вблизи границы* // Докл. АН СССР. — 1964. — Т.158. — С. 264–267.
7. Гупало А.С., Лопушанская Г.П. *Об обобщенных граничных значениях решения однородного параболического уравнения второго порядка* // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. —К.: Наук. думка, — 1989.— С.54–59.
8. Кочубей А.Н. *Диффузия дробного порядка* // Дифференциальные уравнения. — 1990. — Т.26. №4. С. 660–670.
9. Лопушанська Г.П. *Основні граничні задачі для одного рівняння в дробових похідних* // Укр. мат. журн. — 1999. — Т.51. №1. — С. 48–59.

10. Лопушанська Г.П. Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D': Монографія. — Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2002. — 287с.
11. Лопушанська Г., Чмир О. *Узагальнені крайові значення розв'язків півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь* // Нелінійні граничні задачі. — 2007. — Т.17. — С. 50–73.
12. Лопушанский А.О. *Абстрактная параболическая задача Коши в комплекмных интерполяционных шкалах* // Дифференц. уравнения. — 2010. — Т.46. №12. — С. 1799–1803.
13. Михайлов В.П. *О граничных свойствах решений эллиптических уравнений* // Мат. заметки. — 1980. — Т.27, №1. – С. 137–145.
14. Мурач А.А. *Эллиптические псевдодифференциальные операторы в уточненной шкале пространств* // Укр. матем. журн. — 2007. — Т.59, №6. — С. 798–814.
15. Петрушко И.М. *О граничных и начальных значениях решений параболического уравнения второго порядка* // Докл. АН СССР. — 1962. — Т.266, №3. — С. 557–560.
16. Эйдельман С.Д., Дринь Я.М. *Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений* // Матем. исследования (Кишинев). — 1981. — Вып. 63. — С. 18–83.
17. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. —М.: Наука, 1965. — 328 с.
18. Caputo M. *Liner model of dissipation whose Q is almost frequency independent*. II. Geophys. J. R. Astr. Soc. **13** (1967), 520–539.
19. S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei, Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004. — 390 p.

[1] Інститут математики Жешувського університету,
Жешув, Польща

[2] Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна

Надійшло 05.01.2011

Lopushansky A., Lopushanska H., Pasichnyk O. *The traces of the solutions of the semi-linear equations with fractional derivative with respect to time*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 85–93.

The sufficient conditions of the existence of the generalized initial values of the regular in domain solutions for semi-linear diffusion equations under perturbations of the fractional derivative with respect to time are obtained.

Лопушанский А.О., Лопушанская Г.П., Пасичник Е.В. *Следы решений полулинейных уравнений с дробной производной по времени* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 85–93.

Найдены достаточные условия существования обобщенных начальных значений регулярных в области решений полулинейных уравнений диффузии при возмущениях дробной производной по времени.

Карпатські математичні публікації. Т.3. №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3. №1

УДК 517.927

Махней О.В.[1], Тацій Р.М.[2]

РОЗВИНЕННЯ ЗА ВЛАСНИМИ ВЕКТОР-ФУНКЦІЯМИ У ВИПАДКУ ПРОСТИХ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ СИНГУЛЯРНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Махней О.В., Тацій Р.М. *Розвинення за власними вектор-функціями у випадку простих власних значень сингулярного диференціального оператора* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 94–105.

Асимптотичні формули при великих значеннях параметра для розв'язків сингулярного диференціального рівняння дозволяють оцінити функцію Ґріна крайової задачі. За допомогою цієї оцінки побудовано розвинення за власними вектор-функціями сингулярного диференціального оператора у випадку простих власних значень.

Вступ

Лінійні диференціальні оператори, породжені диференціальними виразами з гладкими коефіцієнтами, вивчено досить добре (див., наприклад, [9]). Однак, в задачах прикладного характеру часто зустрічаються розривні чи навіть узагальнені функції в коефіцієнтах. Такі задачі є значно гірше дослідженими.

Ще в середині 50-х років минулого століття вивчались крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого й четвертого порядків, що описують вільні коливання струни і балки, які крім неперервно розподіленої маси несуть на собі ще й зосереджені точкові маси — бусинки (див. [3]). В монографії [1] досліджується оператор Шредінгера на необмеженому проміжку у випадку, коли сингулярний потенціал є, наприклад, скінченною чи нескінченною сумою δ-функцій Дірака. У випадку скалярного сингулярного диференціального оператора побудовано функцію Ґріна та досліджено асимптотичну поведінку власних значень і власних функцій, а також здійснено розвинення за останніми у роботах [4, 7, 5].

Слід зазначити, що спряжені диференціальні вирази містять доданки вигляду $(P(x)Y)^{(j)}$, які при недостатній гладкості не можна звести за допомогою j-кратного диференціювання до звичайних диференціальних. Щоб підкреслити цю обставину, їх у літературі називають квазідиференціальними.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34B05, 34L10.
Ключові слова і фрази: власні функції, розподіли, міри.

Квазіпохідні — це компоненти вектора, за допомогою якого здійснюється зведення квазідиференціального рівняння до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Мабуть, першим, хто ввів поняття квазіпохідних, яке дозволяє відмовитись від вимог гладкості коефіцієнтів у квазідиференціальних виразах, був Д. Шин [13].

Ця стаття присвячена побудові розвинення вектора за власними вектор-функціями диференціального оператора, породженого диференціальним виразом з розривними чи навіть узагальненими матрицями-коефіцієнтами і регулярними крайовими умовами, що узагальнює результати § 9 монографії [9].

1 Постановка задачі

Розглянемо диференціальний вираз

$$L_n(\bar{Y}) \equiv \bar{Y}^{(n)} + A_2(x)\bar{Y}^{(n-2)} + A_3(x)\bar{Y}^{(n-3)} + \ldots + A_n(x)\bar{Y},$$

де $A_i = B_i'$, $B_i(x)$ $(i = \overline{2,n})$ — матриці-функції l-го порядку, елементами яких є неперервні справа функції обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації, $\bar{Y}(x)$ — вектор-стовпець. Тут штрихом позначено узагальнене диференціювання, і тому елементи матриць $A_i(x)$ є мірами (див. [12]). Розглянемо також відповідне диференціальному виразу $L_n(\bar{Y})$ рівняння

$$L_n(\bar{Y}) = \lambda\bar{Y}, \tag{1}$$

де λ — комплексний параметр, і крайові умови

$$U_\nu(\bar{Y}) \equiv \Gamma_\nu\bar{Y}^{(k_\nu)}(a) + \Delta_\nu\bar{Y}^{(k_\nu)}(b) + \sum_{j=0}^{k_\nu-1}\tilde{\Gamma}_{\nu j}\bar{Y}^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{k_\nu-1}\tilde{\Delta}_{\nu j}\bar{Y}^{(j)}(b), \quad \nu = \overline{1,n}, \tag{2}$$

які задаються за допомогою n лінійно незалежних форм $U_\nu(\bar{Y})$; Γ_ν, Δ_ν, $\tilde{\Gamma}_{\nu j}$, $\tilde{\Delta}_{\nu j}$ — сталі матриці l-го порядку; $n-1 \geq k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n \geq 0$, $k_{s+2} < k_s$, причому для кожного значення індексу ν хоча б одна з матриць Γ_ν, Δ_ν відрізняється від нульової.

Поряд з крайовою задачею (1), (2) для векторного диференціального рівняння розглянемо також асоційовану їй крайову задачу для матричного диференціального рівняння

$$L_n(Y) = \lambda Y, \tag{3}$$

$$U_\nu(Y) \equiv \Gamma_\nu Y^{(k_\nu)}(a) + \Delta_\nu Y^{(k_\nu)}(b) + \sum_{j=0}^{k_\nu-1}\tilde{\Gamma}_{\nu j}Y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{k_\nu-1}\tilde{\Delta}_{\nu j}Y^{(j)}(b), \quad \nu = \overline{1,n}, \tag{4}$$

де $Y(x)$ — квадратна матриця l-го порядку.

За допомогою прямокутної матриці $\mathcal{Y} = (Y, Y', \ldots, Y^{(n-1)})^T$ матричне рівняння (3) зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathcal{Y}' = \mathcal{B}'(x)\mathcal{Y} \tag{5}$$

або в розгорнутому (блочному) вигляді

$$\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \dots \\ Y^{(n-2)} \\ Y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & E & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & E \\ \lambda - A_n & -A_{n-1} & \cdots & -A_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \dots \\ Y^{(n-2)} \\ Y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Крайові умови (4) теж можна переписати у матричному вигляді

$$W_a\mathcal{Y}(a) + W_b\mathcal{Y}(b) = 0,$$

де блочні матриці $W_a = (\Gamma_{\nu,j-1})_{\nu,j=1}^{n}$, $W_b = (\Delta_{\nu,j-1})_{\nu,j=1}^{n}$. Оскільки для стрибка матриці-функції $\mathcal{B}(x)$ має місце тотожність $[\Delta\mathcal{B}(x)]^2 \equiv 0$, то система (5) є коректною (див. [10]).

Під розв'язком матричного диференціального рівняння будемо розуміти першу блочну компоненту $Y(x)$ прямокутної матриці $\mathcal{Y}(x)$ системи (5), що задовольняє його в сенсі теорії узагальнених функцій. В роботі [11] встановлено, що розв'язок початкової задачі для рівняння (3) існує і єдиний, причому він разом зі своїми похідними до порядку $n-2$ включно є абсолютно неперервним, а його $(n-1)$-ша похідна складається з функцій, які мають обмежену варіацію на проміжку $[a, b]$ і є там неперервними справа.

Диференціальний вираз $L_n(\bar{Y})$ і крайові умови (2) породжують диференціальний оператор L, який діє з простору абсолютно неперервних вектор-функцій у простір векторів-мір.

Система, спряжена до системи (5), визначається матричною рівністю

$$\mathcal{Z}' = -(\mathcal{B}^*(x))'\mathcal{Z}, \tag{6}$$

де $\mathcal{Z} = \left(Z^{\{n-1\}}, \dots, Z^{\{1\}}, Z\right)^T$, «*» — ермітове спряження, а фігурні дужки означають квазіпохідні в сенсі спряженого рівняння (див. [11]). В роботі [11] встановлено, що вони визначаються формулами

$$Z^{\{0\}} \stackrel{df}{=} Z, \quad Z^{\{i\}} = A_i^* Z - \left(Z^{\{i-1\}}\right)', \quad i = \overline{1, n-1}.$$

З (6) видно (див. [11]), що спряжене до (3) диференціальне рівняння має вигляд

$$L_n^*(Z) \equiv (-1)^n Z^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i}(A_i^* Z)^{(n-i)} = \bar{\lambda} Z,$$

де риска над λ означає комплексне спряження.

Диференціальний вираз $L_n^*(\bar{Y})$ і крайові умови, спряжені до (2) (вони побудовані в роботі [6]), породжують диференціальний оператор L^*, який діє з простору абсолютно неперервних вектор-функцій у простір векторів-мір.

Означення 1.1. *При непарному n ($n = 2\mu - 1$) крайові умови (2) назвемо регулярними для розглядуваної задачі (1), (2), якщо числа θ_0 і θ_l, що визначаються співвідношенням*

$$\theta_0 + \theta_1 s + \ldots + \theta_l s^l = \begin{vmatrix} \Gamma_1\omega_1^{k_1} & \cdots & \Gamma_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\Gamma_1 + s\Delta_1)\omega_\mu^{k_1} & \Delta_1\omega_{\mu+1}^{k_1} & \cdots & \Delta_1\omega_n^{k_1} \\ \Gamma_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \Gamma_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\Gamma_2 + s\Delta_2)\omega_\mu^{k_2} & \Delta_2\omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & \Delta_2\omega_n^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma_n\omega_1^{k_n} & \cdots & \Gamma_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\Gamma_n + s\Delta_n)\omega_\mu^{k_n} & \Delta_n\omega_{\mu+1}^{k_n} & \cdots & \Delta_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix},$$

відрізняються від нуля. При парному n ($n = 2\mu$) крайові умови (2) називатимемо регулярними для цієї задачі, якщо будуть відмінними від нуля числа θ_{-l} і θ_l, що визначаються рівністю

$$\frac{\theta_{-l}}{s^l} + \ldots + \frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s + \ldots + \theta_l s^l =$$

$$\begin{vmatrix} \Gamma_1\omega_1^{k_1} & \cdots & \Gamma_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\Gamma_1 + s\Delta_1)\omega_\mu^{k_1} & (\Gamma_1 + \frac{1}{s}\Delta_1)\omega_{\mu+1}^{k_1} & \Delta_1\omega_{\mu+2}^{k_1} & \cdots & \Delta_1\omega_n^{k_1} \\ \Gamma_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \Gamma_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\Gamma_2 + s\Delta_2)\omega_\mu^{k_2} & (\Gamma_2 + \frac{1}{s}\Delta_2)\omega_{\mu+1}^{k_2} & \Delta_2\omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \Delta_2\omega_n^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma_n\omega_1^{k_n} & \cdots & \Gamma_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\Gamma_n + s\Delta_n)\omega_\mu^{k_n} & (\Gamma_n + \frac{1}{s}\Delta_n)\omega_{\mu+1}^{k_n} & \Delta_n\omega_{\mu+2}^{k_n} & \cdots & \Delta_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix}.$$

2 Оцінка функції Ґріна

Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $LY = 0$ лише при $Y = 0$. Справді, в протилежному випадку досить замінити $L_n(Y)$ виразом $L_n(Y) - cY$, де c — довільне число, відмінне від усіх власних значень оператора L. Таке число існує, оскільки асимптотичні формули свідчать, що цей оператор має лише зліченну множину власних значень (див. [8]). Нехай усі власні значення оператора L є простими, $G(x, t, \lambda)$ — функція Ґріна задачі (3), (4), оператор L має матрицю-функцію Ґріна $G(x, t) = G(x, t, 0)$.

Покладемо тепер $\lambda = -\rho^n$ і розіб'ємо всю комплексну ρ-площину на $2n$ секторів S_q, $q = \overline{0, 2n-1}$, де $S_q = \{\rho : q\pi/n \le \arg\rho \le (q+1)\pi/n\}$. Через T_q позначимо сектор (з вершиною у точці $\rho = -c$), що утворюється з S_q шляхом зсуву $\rho \to \rho + c$.

Розглянемо в комплексній λ-площині послідовність кіл Γ_k, $k = 1, 2, \ldots$, зі спільним центром у початку координат, які мають такі властивості:

1) радіус R_k кола Γ_k необмежено зростає при $k \to \infty$;

2) існує додатне число δ, таке, що прообрази ρ_k в $S_0 \cup S_1$ власних значень оператора L при відображенні $\lambda = -\rho^n$ знаходяться для досить великих k на відстані, не меншій ніж δ, від прообразів кожного з кіл Γ_k. На підставі асимптотичних властивостей власних значень такі кола Γ_k існують.

Розглянемо також інтеграл $I_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} \frac{G(x,t,\lambda)}{\lambda}\, d\lambda$. Застосувавши до нього теорему про лишки, отримаємо

$$I_k = G(x, t) + \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{Q_\nu(x, t)}{\lambda_\nu}, \tag{7}$$

де $Q_\nu(x, t)$ — лишок функції $G(x, t, \lambda)$ відносно її полюса λ_ν (який припускаємо простим), а m_k — число цих полюсів у крузі Γ_k.

Теорема 1. *У випадку регулярних крайових умов на колах Γ_k кожен елемент матриці-функції $G(x, t, \lambda)$ задовольняє нерівність*

$$|G_{ij}(x, t, \lambda)| \le M|\lambda|^{\frac{1-n}{n}}, \quad i, j = \overline{1, l}, \tag{8}$$

де M — деяка стала.

Доведення. При відповідному виборі $\arg\rho$ при відображенні $\lambda = -\rho^n$ коло Γ_k переходить у дугу γ_k кола з центром у початку координат і центральним кутом $\frac{2\pi}{n}$, що проходить у двох сусідніх областях S_0, S_1 комплексної ρ-площини. Розглянемо окремо випадки парного і непарного n.

а) Нехай n — непарне, $n = 2\mu - 1$. Нехай числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — різні корені n-го степеня з числа -1, занумеровані так, що для $\rho \in S_0$ виконується ланцюг нерівностей (див. [9, с. 53])

$$\mathrm{Re}(\rho\omega_1) \leq \mathrm{Re}(\rho\omega_2) \leq \ldots \leq \mathrm{Re}(\rho\omega_n).$$

Крім того, можна показати [9, с. 75], що при $\rho \in S_0$ маємо

$$\mathrm{Re}(\rho\omega_1) \leq 0, \ \ldots, \ \mathrm{Re}(\rho\omega_{\mu-1}) \leq 0, \quad \mathrm{Re}(\rho\omega_{\mu+1}) \geq 0, \ \ldots, \ \mathrm{Re}(\rho\omega_n) \geq 0. \tag{9}$$

Нехай γ_k' — та частина дуги γ_k, що знаходиться в області S_0 і на якій $\mathrm{Re}(\rho\omega_\mu) \leq 0$, а γ_k'' — та її частина, що теж міститься у цій області і на якій $\mathrm{Re}(\rho\omega_\mu) \geq 0$. Оцінимо функцію Ґріна $G_{ij}(x,t,\lambda)$ на дузі γ_k', скориставшись формулами з [6]:

$$G(x,t,\lambda) = (-1)^{nl}\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{l1} & \cdots & Q_{ll} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

де

$$\Delta(\lambda) = \det\left(U_\nu(K^{*\{k-1\}*}(x,a,\lambda)\right)_{\nu,k=1}^{n},$$

$$Q_{ij}(x,t,\lambda) = \begin{vmatrix} K_{i1}(x,a,\lambda) & \cdots & K_{il}^{*\{n-1\}*}(x,a,\lambda) & P_{ij}(x,t,\lambda) \\ U_1(K_{11}(x,a,\lambda)) & \cdots & U_1(K_{1l}^{*\{n-1\}*}(x,a,\lambda)) & U_1(P_{1j}(x,t,\lambda)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(K_{l1}(x,a,\lambda)) & \cdots & U_n(K_{ll}^{*\{n-1\}*}(x,a,\lambda)) & U_n(P_{lj}(x,t,\lambda)) \end{vmatrix}, \tag{11}$$

$$P_{ij}(x,t,\lambda) = \begin{cases} K_{ij}(x,t,\lambda), & x > t, \\ 0, & x < t, \end{cases} \qquad i,j = \overline{1,l},$$

$K(x,t,\lambda)$ — матриця-функція Коші рівняння (3) (за першою змінною вона задовольняє це рівняння, крім того, $K^{(i)}(s,s) = 0$, $i = \overline{0,n-2}$, $K^{(n-1)}(s,s) = E$, E — одинична матриця l-го порядку).

Матриці-функції $K(x,a,\lambda)$, $K^{*\{1\}*}(x,a,\lambda)$, $\ldots$, $K^{*\{n-1\}*}(x,a,\lambda)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків матричного рівняння (3). У той же час їх можна подати як лінійну комбінацію деякої іншої лінійно незалежної системи розв'язків цього рівняння. Нехай $Y_k = (y_{kij})_{i,j=1}^{l}$ — будь-яка фундаментальна система розв'язків матричного рівняння (3). Тоді $K^{*\{p-1\}*}(x,t,\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k(x,\lambda)C_{kp}(t,\lambda)$, $p = \overline{1,n}$, і, як наслідок,

$$U_\nu(K^{*\{p-1\}*}(x,t,\lambda)) = \sum_{k=1}^{n} U_\nu(Y_k(x,\lambda))C_{kp}(t,\lambda), \quad p = \overline{1,n}.$$

Отже, використовуючи блочне множення матриць, запишемо:

$$\begin{pmatrix} U_1(Y_1) & \cdots & U_1(Y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(Y_1) & \cdots & U_n(Y_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} U_1(K(x,t,\lambda)) & \cdots & U_1(K^{*\{p-1\}*}(x,t,\lambda)) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(K(x,t,\lambda)) & \cdots & U_n(K^{*\{p-1\}*}(x,t,\lambda)) \end{pmatrix}.$$

Враховуючи властивість визначників, отримаємо, що $\Delta(\lambda) = \tilde{\Delta}(\lambda)C(\lambda)$, де $\tilde{\Delta}(\lambda) = \det\left(U_\nu(Y_k)\right)_{\nu,k=1}^{n}$, $C(\lambda) = \det\left(C_{\nu k}\right)_{\nu,k=1}^{n}$. Аналогічними міркуваннями, з урахуванням того, що (11) можна записати за елементами останнього стовпця і першого рядка, встановлюємо, що $Q_{ij}(x,t,\lambda) = \tilde{Q}_{ij}(x,t,\lambda)C(\lambda)$, де

$$\tilde{Q}_{ij}(x,t,\lambda) = \begin{vmatrix} y_{1i1} & \cdots & y_{1il} & \cdots & y_{ni1} & \cdots & y_{nil} & P_{ij} \\ U_1(y_{111}) & \cdots & U_1(y_{11l}) & \cdots & U_1(y_{n11}) & \cdots & U_1(y_{n1l}) & U_1(P_{1j}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_1(y_{1l1}) & \cdots & U_1(y_{1ll}) & \cdots & U_1(y_{nl1}) & \cdots & U_1(y_{nll}) & U_1(P_{lj}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(y_{111}) & \cdots & U_n(y_{11l}) & \cdots & U_n(y_{n11}) & \cdots & U_n(y_{n1l}) & U_n(P_{1j}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(y_{1l1}) & \cdots & U_n(y_{1l}) & \cdots & U_n(y_{nl1}) & \cdots & U_n(y_{nll}) & U_n(P_{lj}) \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Тоді формулу (10) перепишемо у вигляді

$$G_{ij}(x,t,\lambda) = (-1)^{nl}\frac{\tilde{Q}_{ij}(x,t,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}, \quad i,j = \overline{1,l}. \tag{13}$$

Функції Y_j можна вибрати так, щоб вони разом зі своїми похідними при досить великих $|\rho|$ задовольняли співвідношення

$$Y_k^{(\nu)}(x,\rho) = \rho^\nu e^{\rho\omega_k(x-a)}\left[\omega_k^\nu E + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \quad \nu = \overline{0,n-1}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{14}$$

де E — одинична матриця l-го порядку, $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ позначає матрицю $\frac{A(x,\rho)}{\rho}$, а $A(x,\rho)$ — матрична функція, всі елементи якої є обмеженими при досить великому $|\rho|$ (див. [8]).

Згідно з [14], маємо, що $K^{[j]}(x,t,\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k^{[j]}(x,\lambda)\,Z_k(t,\lambda)$, де кожен елемент матриці $Z_k(t,\lambda) = \left(z_{kpq}(t,\lambda)\right)_{p,q=1}^{l}$ є відношенням алгебричного доповнення елемента $((n-1)l+q)$-го рядка і $((k-1)l+p)$-го стовпця у визначнику W. Підставивши формули (14) замість $Y_k^{[\nu]}(t)$ у вираз для $Z_k(t,\lambda)$ і скоротивши у кожному елементі цієї матриці чисельник і знаменник на ρ^l, ρ^{2l}, $\ldots$, $\rho^{(n-2)l}$, $\rho^{(n-1)(l-1)}$, $e^{l\rho\omega_s(t-a)}$, $s = \overline{1,n}$, $s \neq k$, $e^{(l-1)\rho\omega_k(t-a)}$, будемо мати

$$Z_k(t,\lambda) = e^{-\rho\omega_k(t-a)}\frac{1}{\rho^{n-1}}\left\langle\frac{\gamma_k}{\gamma}\right\rangle, \tag{15}$$

де $\langle A\rangle = A + O(1/\rho)$ — матриця,

$$\gamma = \begin{vmatrix} E & E & \cdots & E \\ \omega_1 E & \omega_2 E & \cdots & \omega_n E \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1^{n-1}E & \omega_2^{n-1}E & \cdots & \omega_n^{n-1}E \end{vmatrix},$$

E — одинична матриця l-го порядку, $\gamma_k = (\gamma_{kpq})_{p,q=1}^{l}$, а γ_{kpq} — алгебричне доповнення елемента, що лежить на перетині $((n-1)l+q)$-го рядка і $((k+1)l+p)$-го стовпця у визначнику γ.

За формулою Фробеніуса [2, с. 56], якщо

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

де A і D — квадратні матриці, причому $|A| \neq 0$, то

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix}, \quad H = D - CA^{-1}B.$$

Застосуємо $n-1$ разів формулу Фробеніуса до матриці, що відповідає визначнику γ. За матрицю A кожного разу будемо брати помножену на скаляр одиничну матрицю l-го порядку. Матриця H складатиметься з деякої кількості таких самих блоків, що й вихідна матриця, внаслідок властивостей блочного множення матриць і того, що обернена до одиничної матриці теж є одиничною. На підставі цього матриця M^{-1} теж складатиметься з n^2 подібних блоків. Тому $\gamma_{kpq} = 0$ для всіх k і $p \neq q$ (внаслідок зв'язку алгебричних доповнень елементів матриці з оберненою до неї).

У той же час повинні виконуватись співвідношення

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k^j \frac{\gamma_{kpp}}{\gamma} = \begin{cases} 0, & j = \overline{0, n-2}, \\ 1, & j = n-1, \end{cases} \qquad p = \overline{1, l}.$$

Ця система має єдиний розв'язок. З іншого боку, вона справджується при $\frac{\gamma_{kpp}}{\gamma} = -\frac{\omega_k}{n}$, оскільки $\omega_k^n = -1$. Отже, формула (15) набуває вигляду

$$Z_k(t,\lambda) = \frac{1}{n\rho^{n-1}} e^{-\rho\omega_k(t-a)}\langle -\omega_k E\rangle, \quad k = \overline{1,n}. \tag{16}$$

Підставивши вирази (14) у форми $U_\nu(Y)$, матимемо

$$U_\nu(Y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\langle\Gamma_\nu\rangle + (\rho\omega_j)^{k_\nu} e^{\rho\omega_j(b-a)}\langle\Delta_\nu\rangle. \tag{17}$$

Отже, на підставі нерівностей (9) справджуються формули

$$U_\nu(Y_s) = \begin{cases} (\rho\omega_s)^{k_\nu}\langle\Gamma_\nu\rangle, & s = \overline{1, \mu-1}, \\ (\rho\omega_s)^{k_\nu}\{\langle\Gamma_\nu\rangle + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}\langle\Delta_\nu\}, & s = \mu, \\ (\rho\omega_s)^{k_\nu} e^{\rho\omega_s(b-a)}\langle\Delta_\nu\rangle, & s = \overline{\mu+1, n}. \end{cases} \tag{18}$$

Підставивши їх у $\tilde\Delta(\lambda)$, отримаємо

$$\tilde\Delta(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{n}\rho^{lk_\nu}\prod_{s=\mu+1}^{n} e^{l\rho\omega_s(b-a)}\sum_{2=0}^{l}\langle\theta_s\rangle e^{s\rho\omega_\mu(b-a)} = \prod_{\nu=1}^{n}\rho^{lk_\nu}\prod_{s=\mu+1}^{n} e^{l\rho\omega_s(b-a)}\theta_l\prod_{s=1}^{l}\langle e^{\rho\omega_\mu(b-a)} - \xi_s\rangle, \tag{19}$$

причому θ_s тут ті самі, що й в означенні регулярних крайових умов, а ξ_s — корені рівняння $\theta_0 + \theta_1\xi + \ldots + \theta_l\xi^l = 0$.

Розглянемо матрицю-функцію $G(x,t,\lambda)$ при $x > t$ (у випадку $x < t$ міркування будуть аналогічними). Тоді останній елемент 1-го рядка у визначнику буде $K_{ij}(x,t,\lambda)$. Помножимо по l стовпців визначника $\tilde Q_{ij}(x,t,\lambda)$, починаючи з $(\mu l+1)$-го, $((\mu+1)l+1)$-го, $\ldots$, $((n-1)l+1)$-го, на j-й стовпець матриць $-Z_{\mu+1}(t)$, $-Z_{\mu+2}(t)$, $\ldots$, $-Z_n(t)$ відповідно і додамо до останнього стовпця. Визначник внаслідок цього не зміниться. Тоді враховуючи (14), (16) і (17), елементами останнього стовпчика в $\tilde Q_{ij}(x,t,\lambda)$ будуть:

$$\frac{1}{n\rho^{n-1}}P_0 = \begin{cases} \langle 0\rangle, & i \neq j, \\ -\frac{1}{n\rho^{n-1}}\sum\limits_{k=1}^{\mu} e^{\rho\omega_k(x-t)}\langle\omega_k\rangle, & i = j, \end{cases}$$

$$\frac{\rho^{k_\nu}}{n\rho^{n-1}}P_{0p} = -\frac{\rho^{k_\nu}}{n\rho^{n-1}}\left\{\sum_{s=1}^{\mu} e^{\rho\omega_s(b-t)}\langle\omega_s^{k_\nu+1}\Delta_{\nu pj}\rangle - \sum_{s=\mu+1}^{n} e^{-\rho\omega_s(t-a)}\langle\omega_s^{k_\nu+1}\Gamma_{\nu pj}\rangle\right\},$$

де $\nu = \overline{1,n}, p = \overline{1,l}$. Підставимо тепер (12), (14), (16), (18), (19), а також вирази для останнього стовпця $\tilde Q_{ij}(x,t,\lambda)$ в (13) і розподілимо множники знаменника $\tilde\Delta(\lambda)$ таким чином: на ρ^{k_ν} розділимо $((\nu-1)l+2)$-й, $((\nu-1)l+3)$-й, $\ldots$, $(\nu l+1)$-й рядки, на $e^{\rho\omega_s(b-a)}$ — $((s-1)l+p)$-ті стовпці, $s = \overline{\mu+1, r}$, $p = \overline{1,l}$, і на $\langle e^{\rho\omega_\mu(b-a)} - \xi_p\rangle$ поділимо $((\mu-1)l+p)$-ті стовпці відповідно. Тоді формула (13) набуде вигляду

$$G_{ij}(x,t,\lambda) = \frac{(-1)^l}{n\rho^{n-1}\theta_l}D,$$

де перший рядок визначника D порядку nl має вигляд

$$\Big(\langle 0\rangle, \ldots, \langle 0\rangle, e^{\rho\omega_1(x-a)}\langle 1\rangle, \langle 0\rangle, \ldots, \langle 0\rangle, e^{\rho\omega_{\mu-1}(x-a)}\langle 1\rangle, \langle 0\rangle, \ldots, \langle 0\rangle, \frac{e^{\rho\omega_\mu(x-a)}\langle 1\rangle}{\langle e^{\rho\omega_1(b-a)} - \xi_i\rangle},$$
$$\langle 0\rangle, \ldots, \langle 0\rangle, e^{\rho\omega_{\mu+1}(x-b)}\langle 1\rangle, \langle 0\rangle, \ldots, \langle 0\rangle, e^{\rho\omega_n(x-b)}\langle 1\rangle, \langle 0\rangle, \ldots, \langle 0\rangle, P_0\Big),$$

причому відмінні від $\langle 0\rangle$ елементи знаходяться на останньому і $((s-1)l+i)$-х місцях, а $((\nu-1)l+p+1)$-й рядок побудовано так:

$$\Big(\langle\omega_1^{k_\nu}\Gamma_{\nu p1}\rangle, \ldots, \langle\omega_1^{k_\nu}\Gamma_{\nu pl}\rangle, \ldots, \langle\omega_{\mu-1}^{k_\nu}\Gamma_{\nu pl}\rangle, \frac{\omega_\mu^{k_\nu}\langle\Gamma_{\nu p1} + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}\Delta_{\nu p1}\rangle}{\langle e^{\rho\omega_\mu(b-a)} - \xi_1\rangle}, \ldots,$$
$$\frac{\omega_\mu^{k_\nu}\langle\Gamma_{\nu pl} + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}\Delta_{\nu pl}\rangle}{\langle e^{\rho\omega_\mu(b-a)} - \xi_l\rangle}, \langle\omega_{\mu+1}^{k_\nu}\Delta_{\nu p1}\rangle, \ldots, \langle\omega_r^{k_\nu}\Delta_{\nu pl}\rangle, P_{\nu p}\Big).$$

Аналогічно, як у [9, с. 78] можна показати, що внаслідок регулярності крайових умов знаменник $\langle e^{\rho\omega_\mu(b-a)} - \xi_p\rangle$, $p = \overline{1,l}$, обмежується знизу одним і тим самим числом. Тоді, з огляду на умови (9), всі елементи визначника D на дузі γ'_k обмежені зверху, оскільки експоненти там мають недодатну дійсну частину. Отже, на дугах γ'_k справджується нерівність

$$|G_{ij}(x,t,\lambda)| \le \frac{M}{|\rho|^{n-1}}, \quad M = \text{const}. \tag{20}$$

Якщо тепер у визначнику $\tilde{Q}_{ij}(x,t,\lambda)$ помножити групи по l стовпчиків, починаючи з $((\mu-1)l+1)$-го, $(\mu l+1)$-го, ..., $((n-1)l+1)$-го, на j-й стовпець матриць $-Z_\mu(t)$, $-Z_{\mu+1}(t)$, ..., $-Z_n(t)$ відповідно та додати до останнього стовпця, то, повторивши попередні міркування, легко переконатись у правильності нерівності (20) і на дугах γ''_k.

Таким чином, нерівність (20) доведено для тієї частини дуги γ_k, що розміщена в секторі S_0. Оскільки ці самі міркування застосовні до будь-якої області S_ν, вони дають той самий результат на дузі γ_k і в секторі S_1. Переходячи від ρ до λ, отримуємо твердження леми для випадку непарного n.

б) Нехай n – парне, $n = 2\mu$. Оскільки

$$U_\nu(Y_\mu) = (\rho\omega_\mu)^{k_\nu}\{\langle\Gamma_\nu\rangle + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}\langle\Delta_\nu\rangle, \quad U_\nu(Y_{\mu+1}) = (\rho\omega_{\mu+1})^{k_\nu}\{\langle\Gamma_\nu\rangle + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}\langle\Delta_\nu\rangle\},$$

то цей випадок відрізняється від попереднього лише тим, що $\tilde{\Delta}(\lambda)$ містить вираз $\theta_l \prod_{s=1}^{2l} \langle e^{\rho\omega_\mu(b-a)} - \xi_s\rangle$ у тих же позначеннях. Тут $((\mu-1)l+s)$-ті стовпці потрібно поділити на $\langle e^{\rho\omega_\mu(b-a)} - \xi_s\rangle$, $s = \overline{1,2l}$, відповідно. Решта міркувань у доведенні теореми будуть аналогічними до випадку дуги γ'_k. Теорему доведено. □

Зауваження 2.1. *З доведення випливає, що нерівність (8) справджується для великих $|\lambda|$ і в області O_δ, отриманій з λ-площини відкиданням образів кіл $|\rho - \rho_k| < \delta$ при відображенні $\lambda = -\rho^n$.*

3 Основні результати

Теорема 2. *Функція Ґріна $G(x,t)$ диференціального оператора L, породженого регулярними крайовими умовами (2), розвивається в рівномірно збіжний відносно x і t з $[a,b]$ ряд*

$$G(x,t) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{Q_\nu(x,t)}{\lambda_\nu}. \tag{21}$$

Доведення. Користуючись теоремою 1 і зауваженням до неї, отримаємо оцінки (тут R_k — радіус кола Γ_k):

$$|I_{kij}(x,t)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{M}{R_k^{\frac{n-1}{n}} R_k} 2\pi R_k = \frac{M}{R_k^{\frac{n-1}{n}}},$$

$$\left|\frac{Q_{kij}(x,t)}{\lambda_k}\right| = \left|\frac{1}{2\pi\lambda_k}\int\limits_{|\rho-\rho_k|=\delta} n\rho^{n-1}G_{ij}(x,t,-\rho^n)d\rho\right| \leqslant \frac{nM\delta}{|\lambda_k|}, \quad i,j=\overline{1,l},$$

з яких безпосередньо випливають співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} I_k(x,t) = 0, \quad \lim_{k\to\infty}\frac{Q_k(x,t)}{\lambda_k} = 0, \tag{22}$$

причому збіжність є рівномірною відносно x і t з $[a,b]$. Внаслідок (7) і (22) буде мати місце формула (21), що й доводить теорему. □

Теорема 3. *Якщо всі власні значення оператора L, породженого регулярними крайовими умовами, є простими нулями функції $\Delta(\lambda)$, то для його функції Ґріна при виконанні умови нормованості*

$$\int_a^b \bar{Z}^*_\nu(x)\bar{Y}_\nu(x)\,dx = 1 \tag{23}$$

існує розвинення у рівномірно збіжний ряд

$$G(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\bar{Y}_\nu(x)\bar{Z}^*_\nu(t)}{\lambda_\nu}. \tag{24}$$

Доведення. Оскільки $Q_\nu(x,t)$ — лишок функції $G(x,t,\lambda)$ відносно її полюса λ_ν, а всі власні значення оператора L — прості нулі функції $\Delta(\lambda)$, то згідно з формулою, яка доводиться аналогічно, як у [9, с. 48–50], $Q_\nu(x,t) = \bar{Y}_\nu(x)\bar{Z}^*_\nu(t)$, де $\bar{Y}_\nu(x)$, $\bar{Z}_\nu(t)$ — власні функції операторів L і L^*, що відповідають власним значенням λ_ν та $\bar{\lambda}_\nu$ і пронормовані так, щоб виконувались співвідношення (23). Теорему доведено. □

З цієї теореми легко отримати теорему про розвинення заданої вектор-функції $f(x)$.

Теорема 4. *Нехай L — оператор, породжений регулярними крайовими умовами, і нехай всі його власні значення є простими нулями функції $\Delta(\lambda)$. Тоді будь-яка вектор-функція $f(x)$ з області визначення оператора L розвивається у рівномірно збіжний ряд за його власними функціями*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\bar{Y}_\nu(x), \tag{25}$$

де при виконанні умови (23)

$$\alpha_\nu = \int_a^b \bar{Z}^*_\nu(t)f(t)\,dt,$$

а $\bar{Y}_\nu(x)$, $\bar{Z}_\nu(x)$ — власні функції операторів L і L^*, що відповідають власним значенням λ_ν і $\bar{\lambda}_\nu$.

Доведення. Покладемо $Lf = \varphi'$, $L^*\bar{Z}_\nu = \psi'_\nu$, де φ і ψ_ν — вектор-функції обмеженої на $[a,b]$ варіації, неперервні справа. Тоді

$$f(x) = \int_a^b G(x,t)\,d\varphi(t), \quad \bar{Z}_\nu(x) = \int_a^b H(x,t)\,d\psi_\nu(t), \tag{26}$$

де $H(x,t)$ — функція Ґріна оператора L^*. Підставимо в формулу (26) замість функції $G(x,t)$ її розвинення (24). Внаслідок рівномірної збіжності останнього, можемо його інтегрувати почленно. Отже, справджується формула (25), де

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu}\int_a^b \bar{Z}_\nu^*(t)\,d\varphi(t). \tag{27}$$

Оскільки $G(x,t) = H^*(t,x)$ (див. [6]), то буде виконуватись також і рівність

$$\int_a^b d\psi_\nu^*(x)\int_a^b G(x,t)\,d\varphi(t) = \int_a^b d\psi_\nu^*(x)\int_a^b H^*(t,x)\,d\varphi(t),$$

звідки, враховуючи (26), отримаємо співвідношення $\int_a^b d\psi_\nu^*(x) f(x) = \int_a^b \bar{Z}_\nu^*(x)\,d\varphi(x)$.

З іншого боку, $L^*\bar{Z}_\nu = \lambda_\nu^*\bar{Z}_\nu$. Тоді $\psi_\nu(x) = \int_a^x \lambda_\nu^*\bar{Z}_\nu(t)\,dt$. Підставивши цю рівність у (27), отримаємо, що

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu}\int_a^b d\psi_\nu^*(x) f(x) = \frac{1}{\lambda_\nu}\int_a^b (\lambda_\nu^*\bar{Z}_\nu(x))^* f(x)\,dx = \int_a^b \bar{Z}_\nu^*(x) f(x)\,dx,$$

що й потрібно було довести. □

Отже, за допомогою оцінки матриці-функції Ґріна крайової задачі побудовано розвинення у ряд за власними вектор-функціями диференціального оператора L будь-якої вектор-функції з області визначення оператора L (тобто з множини вектор-функцій, які разом зі своїми похідними до порядку $n-2$ є абсолютно неперервними на $[a,b]$, а компоненти $(n-1)$-ї похідної мають там обмежену варіацію і неперервні справа, і які, крім того, задовольняють крайові умови (2)). Отримані результати полегшують дослідження коливань і стійкості будівельних конструкцій.

Література

1. Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. — М.: Мир, 1991. — 566 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 550 с.
3. Кац И.С., Крейн М.Г. *О спектральных функциях струны* // Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон. — М.: Мир — 1968. — С. 648–731.
4. Махней О.В. *Асимптотика власних значень і власних функцій сингулярного диференціального оператора на скінченному інтервалі* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2001. — Т.44, №2. — С. 17–25.
5. Махней О. В. *Розвинення за власними функціями сингулярного диференціального оператора* // Математичні методи та фізико-механічні поля. — 2004. — Т.47, №4. — С. 88–94.

6. Махней О.В. *Функція Ґріна крайової задачі для сингулярного квазідиференціального рівняння* // Вісник НУ "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки. — 2009. — №643. — С. 64–72.
7. Махней О.В. *Функція Гріна сингулярного диференціального оператора та її властивості* // Матем. студії. — 2002. — Т.18, №2. — С. 147–156.
8. Махней А.В., Таций Р.М. *Асимптотика собственных значений краевой задачи для векторного сингулярного дифференциального уравнения* // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т.45, №6. — С. 788–796.
9. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 528 с.
10. Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. *Матричні інтегральні рівняння та диференціальні системи з мірами* // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. — 2006. — № 566. — С. 33–40.
11. Тацій Р.М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. // Препр. НАН України. Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача, №2 94. — Львів, 1994. — 56 с.
12. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 312 с.
13. Шин Д.Ю. *О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка* // Мат. сб. — 1940. — Т.7(49), №3. — С. 479–532.
14. Makhney O.V., Tatsiy R.M. *The structure of Cauchy function of the vector quasidifferential equation* Математичні Студії. — 2004. — Т.21, №2. — С. 221–224.

[1] Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
Івано-Франківськ, Україна

[2] Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,
Львів, Україна

Надійшло 09.09.2010

Makhnei O.V., Tatsii R.M. *Expansion by eigenvectors in case of simple eigenvalues of singular differential operator*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 94–105.

The asymptotic formulas with large values of parameter for solutions of singular differential equation allow us to estimate Green's function of the boundary-value problem. With the help of this estimation the expansion of singular differential operator by eigenvectors in the case of simple eigenvalues is constructed.

Махней А.В., Таций Р.М. *Разложение по собственным вектор-функциям в случае простых собственных значений сингулярного дифференциального оператора* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 94–105.

Асимптотические формулы при больших значениях параметра для решений сингулярного дифференциального уравнения позволяют оценить функцию Грина краевой задачи. С помощью этой оценки построено разложение по собственным вектор-функциям сингулярного дифференциального оператора в случае простых собственных значений.

Карпатські математичні публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №1

УДК 515.12+512.58

Овчар І.Є., Скасків О.Б.

ПРО ОЦІНКИ ІНТЕГРАЛІВ ТИПУ ЛАПЛАСА, ЗАЛЕЖНИХ ВІД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Овчар І.Є., Скасків О.Б. *Про оцінки інтегралів типу Лапласа, залежних від малого параметра* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 106–111.

Встановлюються асимптотичні оцінки інтегралів типу Лапласа.

Нехай $f(x)$ — довільна невід'ємна вимірна функція на $\mathbb{R}_+ := [0;+\infty)$, а ν — зліченно-адитивна на $\mathbb{R}_+$ міра з необмеженим носієм. Розглянемо функції $F(\sigma)$, визначені на $\mathbb{R}_- := (-\infty;0)$ за допомогою збіжного для всіх $\sigma\in\mathbb{R}_-$ інтегралу

$$F(\sigma)=\int_{\mathbb{R}_+} f(x)e^{\sigma x}\nu(dx). \qquad (1)$$

Через $\mathcal{I}_0(\nu)$ позначимо клас таких функцій вигляду (1), а через $\nu(E)$ — позначаємо ν-міру ν-вимірної множини $E\subset\mathbb{R}_+$, тобто $\nu(E)=\int_{\mathbb{R}_+\cap E}\nu(dx)$.

Зазначимо, що у статтях [5, 6] встановлювались оцінки додатних інтегралів вигляду (1) (збіжних для всіх $\sigma\in\mathbb{R}_+$ в [5], кратних інтегралів типу Лапласа в [6]), при цьому отримані оцінки використовувались при дослідженні асимптотичних властивостей рядів Діріхле. Виявляється, що можна отримувати оцінки зверху інтегралів вигляду (1) через максимум підінтегрального виразу без додаткових припущень стосовно функції f, крім припущень додатності і неперервності. У статті [5] такі оцінки отримано за умов лише на міру ν, при цьому отримувані оцінки виконуються зовні деяких виняткових множин. В [5] також відзначено, що в загальному не можна отримати оцінки інтегралів вигляду (1) зверху через $\mu(\sigma,F)$ без виняткових множин. В [2, с.190–191] функція, подібна до $\mu(\sigma,F)$, вводиться для вивчення цілих функцій, що є перетвореннями Фур'є деякої функції f. А в [1] відзначено природність задачі дослідження асимптотичних властивостей інтегралів Лебега-Стільтьєса в залежності від властивостей міри $\nu(dt)=dv(t)$, де $v(t)$ — додатна монотонна функція.

У цій статті отримаємо деякі асимптотичні оцінки інтегралів вигляду (1) з класу $\mathcal{I}_0(\nu)$ та застосуємо їх до абсолютно збіжних у півплощині $\{z\colon Re\ z<0\}$ рядів Діріхле з додатними показниками.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.

Ключові слова і фрази: інтеграл типу Лапласа, вимірна функція, міра з необмеженим носієм.

Нехай L — клас додатних неперервних на $[0,+\infty)$ функцій $\psi(t)$, таких що $\psi(t)\to+\infty$ $(t\to+\infty)$; L^+ — підклас L, в який входять зростаючі до $+\infty$ при $x\to+\infty$ функції; L_1 — клас функцій $\psi\in L$, таких що

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\psi(t)}<+\infty,$$

$L_1^+=L_1\cap L^+$. Для $\Phi\in L^+$ та $h\in L^+$ введемо класи функцій

$$L_{h,\Phi}:=\Big\{\psi\in L_1\colon h(t)\int_{\Phi(t)/2}^{+\infty}\frac{du}{\psi(u)}\to 0\ (t\to+\infty)\Big\},\quad L^+_{h,\Phi}:=L_{h,\Phi}\cap L_1^+.$$

Для $\Phi\in L^+$ визначимо клас

$$\mathcal{I}_0(\nu,\Phi)=\{F\in\mathcal{I}_0(\nu)\colon\ \ln F(\sigma)\ge\Phi(1/|\sigma|)\ (\sigma\in(\sigma_0;0))\}.$$

Для функції $h\in L^+$ та вимірної множини $E\subset(-\infty;0)$ асимптотичною h-щільністю множини E у точці $\sigma=0$ назвемо величину

$$D_h(E):=\varlimsup_{r\to-0}h(1/|r|)\,meas(E\cap[r,0))dx,$$

де $meas\ (E_1)=\int_{E_1}dx$ — Лебегова міра на $\mathbb{R}$ вимірної множини E_1.

Зауваження. Відзначимо, що поняття асимптотичної h-щільності множини E у точці $\sigma=0$ є змістовним лише у випадку, коли $\varlimsup\limits_{t\to+\infty}h(t)/t>0$, позаяк у протилежному випадку $D_h(E)=0$ для $E=[-1;0)$.

Метод доведень цього повідомлення є близьким до методу доведень з [5, 6], який по-суті експлуатує ту ж ідею, що й у П. Розенблума [8]. Як і в [5, 6], нескладно переконуємось, що при фіксованому $\sigma<0$ на ймовірнісному просторі $\Omega=\mathbb{R}_+$ з мірою

$$P(dx)=\frac{f(x)e^{\sigma x}}{F(\sigma)}\nu(dx)$$

для випадкової величини $\xi=x$ математичне сподівання $M\xi$ і дисперсія $D\xi$ дорівнюють відповідно

$$M\xi=\int_{\mathbb{R}_+}\xi(x)P(dx)=g'(\sigma),\quad D\xi=g''(\sigma),\quad g(\sigma)=\ln F(\sigma),$$

а за нерівністю Чебишова для $\varepsilon=\sqrt{cD\xi}$, $c>1$, маємо

$$\frac{1}{F(\sigma)}\int\limits_{|x-g'(\sigma)|\ge\sqrt{cg''(\sigma)}}e^{\sigma x}f(x)\nu(dx)=P\{|\xi-M\xi|\ge\varepsilon\}\le\frac{D\xi}{\varepsilon^2}=\frac{1}{c}.$$

Звідси

$$F(\sigma)\le\frac{c}{c-1}\int\limits_{|x-g'(\sigma)|<\sqrt{cg''(\sigma)}}e^{\sigma x}f(x)\nu(dx) \qquad (2)$$

для всіх $\sigma<0$.

Наступна лема є по-суті варіантом відповідних тверджень з [7, с. 390] та [5, 6].

Лема. *Нехай $g_0(t)$ — додатна диференційовна неспадна на $(-\infty, 0)$ функція, ψ — додатна локально інтегровна на $(0,+\infty)$ функція, а множина*

$$E(g_0, \psi) := \{t < 0 \colon\ g_0'(t) \ge \psi(g_0(t))\}.$$

Тоді

$$meas\,(E \cap [r, R]) \le \int\limits_{g_0(r)}^{g_0(R)} \frac{dt}{\psi(t)}, \quad -\infty < r < R < 0.$$

Доведення. Справді,

$$meas(E \cap [r,R]) = \int\limits_{E\cap[r,R]} dt \le \int\limits_{E\cap[r,R]} \frac{g_0'(t)}{\psi(g_0(t))} dt =$$

$$\int\limits_{g_0(E\cap[r,R])} \frac{dx}{\psi(x)} \le \int\limits_{g_0(r)}^{g_8(R)} \frac{dx}{\psi(x)}.$$

□

Нехай $supp\ \nu$ — носій міри ν в $\mathbb{R}_+$, тобто замкнена множина $E = supp\ \nu$ є такою, що $\nu(\mathbb{R}_+ \setminus E) = 0$ і $\nu(\{x \in \mathbb{R}_+ : |x - x_0| < r\}) > 0$ для кожних $x_0 \in E$ і $r > 0$.

Для $\sigma < 0$ та $F \in \mathcal{I}_0(\nu)$ позначимо

$$\mu_*(\sigma, F) = \sup\{f(x)e^{\sigma x} \colon x \in supp\ \nu\}.$$

Нехай

$$\nu(a, b] = \nu(\{x \in \mathbb{R}_+ : a < x \le b\}).$$

Доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай $\Phi \in L^+$, $F \in \mathcal{I}_0(\nu, \Phi)$. Якщо*

$$(\exists \psi \in L_{h,\Phi}) \colon \varlimsup_{t\to+\infty} \nu\left(t - \sqrt{\psi(t)}; t + \sqrt{\psi(t)}\right] \le d < +\infty, \tag{3}$$

то

$$F(\sigma) \le (d + o(1))\mu_*(\sigma, F)$$

при $\sigma \to -0$ $(\sigma \notin E)$, де винядкова множина $E \subset \mathbb{R}_-$ є такою, що $D_h(E) = 0$.

Доведення. Нехай $\theta > 0$ є таким, що $d\theta < 1$. Для довільного $\varepsilon > 0$ приймемо

$$a = \frac{1 - d\theta}{1 + \varepsilon\theta}$$

та виберемо $c > 1$ так, щоб $c/(c-1) < 1 + \varepsilon\theta$. За умовою (3) з деякою функцією $\psi_1 \in L_{h,\Phi}$

$$\nu\left(t - \sqrt{\psi_1(t)}; t + \sqrt{\psi_1(t)}\right] \le d + a\varepsilon \quad (t \ge t_0). \tag{4}$$

Зауважуючи, що за вибором $(1 + \varepsilon\theta)(d + a\varepsilon) = d + \varepsilon$, звідси за нерівністю (2), послідовно скориставшись лемою з $g_0(t) = g'(t)$, $\psi(t) = \psi_1(t)/c$, та нерівністю (4), при $\sigma \to -0$ $(\sigma \notin E(g', \psi))$ отримуємо

$$F(\sigma) < (1 + \varepsilon/2)\mu_*(\sigma, F)\nu(g'(\sigma) - \sqrt{\psi_1(g'(\sigma))}; g'(\sigma) + \sqrt{\psi_1(g'(\sigma))}] \le (d + \varepsilon)\mu_*(\sigma, F). \tag{5}$$

Позаяк з монотонності g' випливає, що

$$g'(\sigma) \ge (1 + \sigma)g'(\sigma) \ge \int_{-1}^{\sigma} g'(t) = g(\sigma) - g(-1) \ge \Phi(1/|\sigma|)/2 \quad (\sigma \to -0),$$

то для асимптотичної h-щільності множини $E_1 := E(g', \psi))$ отримуємо

$$0 \le D_h(E_1) \le \varlimsup_{r\to-0} h(1/|r|) \int_{g'(r)}^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} \le ch(1/|r|) \int_{\Phi(1/|r|)/2}^{+\infty} \frac{dx}{\psi_1(x)} = 0,$$

тобто $D_h(E_1) = 0$.

Нехай $\sigma(\varepsilon)$ і $E_1(\varepsilon)$ є такими, що нерівність (5) виконується для всіх $\sigma \in (\sigma(\varepsilon); 0) \setminus E_1(\varepsilon)$, при цьому

$$r(1/|r|)\ meas(E_1(\varepsilon) \cap [r; 0)) \le \varepsilon \quad (r \in (\sigma(\varepsilon); 0)).$$

Виберемо тепер послідовності $\varepsilon_n = 2^{-n}$, $r_n = \sigma(\varepsilon_n) \nearrow 0$ $(n \to +\infty)$, множину

$$E_2 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left([r_n; r_{n+1}) \bigcap E_1(\varepsilon_n)\right)$$

та функцію $\varepsilon = \varepsilon(\sigma) \colon [r_1, 0) \to (0, +\infty)$ таку, що

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon_n \text{ для } \sigma \in [r_n; r_{n+1}).$$

Тоді, за доведеним, для всіх $\sigma \in [r_1; 0) \setminus E_2$ отримуємо

$$F(\sigma) \le (d + \varepsilon(\sigma))\mu_*(\sigma, F),$$

при цьому $\varepsilon(\sigma) \to 0$ $(\sigma \to -0)$.

Для оцінки h-щільності множини E_2 при $r \in [r_n; r_{n+1})$ і $n \to +\infty$ маємо

$$h(1/|r|)meas(E_2 \cap [r; 0)) \le h(1/|r|)\big(2^{-n}1/h(1/|r|) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{-k}/h(1/|r_k|)\big) \le \sum_{k=n}^{+\infty} 2^{-k} = o(1),$$

тобто $D_h(E_2) = 0$. Теорему 1 доведено. □

Зауваження. 1. *Твердження теореми 1 є елементарним у випадку, коли умова (3) виконується з функцією $\psi \in L_{h,\Phi}$ такою, що*

$$t - \sqrt{\psi(t)} = O(1) \quad (t \to +\infty),$$

позаяк у цьому випадку з умови (3) випливає, що $\nu(\mathbb{R}_+) < +\infty$.

2. *Якщо $\Phi(t) = \tau t^\rho$, $\tau \in (0, +\infty)$, $\rho \in (1, +\infty)$, то, наприклад, у випадку, коли умова (3) виконується з $\psi(t) \ge t^{1+1/\rho_1}$, $\rho_1 \in (1, \rho)$, твердження теореми 1 перестає бути тривіальним.*

З теореми 1 можна отримати наслідки для абсолютно збіжних у півплощині $\{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$ рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n e^{z\lambda_n}. \tag{1}$$

де (λ_n) — така послідовність, що $0 = \lambda_0 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} \to +\infty$ $(1 \le n \to +\infty)$, які при $d = 1$ доповнюють відповідні результати з [4, 3] у частині уточнення опису величини виняткої множини.

Для цього досить вибрати міру ν таку, що для кожної обмеженої множини $E \subset \mathbb{R}_+$

$$\nu(E) = \sum_{\lambda_n \in E} \delta_{\lambda_n}(E),$$

де δ_λ — одинична міра Дірака, зосереджена в точці λ, і застосувати теорему 1 до ряду Діріхле

$$\mathfrak{M}(\sigma, F) = \sum_{n=0}^{+\infty} |F_n| e^{\sigma\lambda_n} = \int_0^{+\infty} f(x) e^{x\sigma} d\nu(x) \stackrel{def}{=} I(\sigma).$$

де f — невід'ємна функція така, що $f(\lambda_n) = |F_n|$ і $f(x) = 0$ для всіх $x \notin \{\lambda_n\colon n \ge 0\}$. Тоді $\mu_*(\sigma, I) = \mu(\sigma, F) \stackrel{def}{=} \{|F_n| e^{\sigma\lambda_n}\colon n \ge 0\}$. І, якщо виконуються умови теореми 1 для $I(\sigma)$, то негайно за допомогою нерівностей $\mu(\sigma, F) \le M(\sigma, F) \le \mathfrak{M}(\sigma, F)$ отримаємо, що

$$M(\sigma, F) = (1 + o(1))\mu(\sigma, F) \tag{2}$$

при $\sigma \to -0$ $(\sigma \notin E,\ D_h(E) = 0)$. Залишається зауважити, що умови теореми 1 для функції $I(x)$ виконуються як тільки $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \ge \Phi(1/|\sigma|)$ $(\sigma \in (\sigma_0; 0))$ та

$$\lim_{R\to+\infty} h(\varphi(2\lambda_{n+1})) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} = 0, \tag{3}$$

де функція φ — обернена до функції Φ. Для того, щоб у цьому переконатись досить вибрати у рамках теореми 1 функцію ψ таку, що

$$\sqrt{\psi(t)} = l_n + \frac{l_{n+1} - l_n}{b_{n+1} - b_n}(t - b_n) \quad (t \in [b_n, b_{n+1})),$$

де $b_n = (\lambda_n + \lambda_{n-1})/2$, $l_n = (\lambda_n - \lambda_{n-1})/2$ $(n \ge 1)$, і зауважити, що

$$\int_{b_n}^{b_{n+1}} \frac{dt}{\psi(t)} = 2\Big(\frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} + \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\Big), \quad \int_{\lambda_n}^{b_{n+1}} \frac{dt}{\psi(t)} = \Big(\frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} + \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\Big),$$

і, тому, для $R \in [\varphi(2\lambda_n), \varphi(2\lambda_{n+1}))$

$$h(R) \int_{\Phi(R)/2} \frac{dt}{\psi(t)} \le 5 \cdot h(\varphi(\lambda_{n+1})) \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}.$$

Отже, доведено такий наслідок.

Наслідок. *Нехай $\Phi \in L$, $h \in L$, і для абсолютно збіжного у півплощині $\{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$ ряду Діріхле вигляду (1) виконуються умови $\ln M(\sigma, F) \ge \Phi(1/|\sigma|)$ $(\sigma \in (\sigma_0, 0))$ та (3). Тоді співвідношення (2) виконується при $\sigma \to -0$ $(\sigma \notin E,\ D_h(E) = 0)$.*

На завершення висловимо таке припущення.

Припущення. *Твердження наслідку залишиться правильним, якщо умову (3) замінити умовою*

$$\lim_{r\to+\infty} h(R) \sum_{\lambda_n \ge R\Phi(R)} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = 0,$$

яка в загальному є слабшою за умову (3).

Література

1. Бойчук В.С., Гольдберг А.А. *К теореме о трех прямых* // Мат. заметки. — 1974. — Т.25, №1. — С. 45–53.
2. Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
3. Сало Т., Скасків О. *Про максимум модуля і максимальний член абсолютно збіжних рядів Діріхле* // Матем. Вісник НТШ. — 2007. — Т.3. — С.764–574.
4. Скаскив О.Б. *К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции* // Изв. АН СССР, сер. мат. — 1989. — Т.53, №4. — С.833–850.
5. Скаскив О.Б. *О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле* // Матем. заметки. — 1999. — Т.66, №2. — С.282–292.
6. Скасків О.Б., Тракало О.М. *Асимптотичні оцінки інтегралів типу Лапласа* // Мат. Студії. 2002. — Т.18, №2. — С.125–146.
7. Hayman W.K. Subharmonic functions. V.2. — London etc.: Acad.Press, 1989. — XXI+591 pp.
8. Rosenbloom P.C. *Probability and entire functions* // Studies Math. Anal. and Related Topics. Stanford: Calif. Univ. Press. 1962, 325–330.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Львів, Україна

Надійшло 23.12.2010

Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. *On the estimates of the Laplace integrals on the small parameter*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 106–111.

Asymptotic estimates for the Laplace integrals are established.

Овчар И.Е., Скаскив О.Б. *Об оценках интегралов типа Лапласа, зависимых от малого параметра* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 106–111.

Устанавливаются асимптотические оценки интегралов типа Лапласа.

Карпатські математичні публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №1

УДК 517.51

Пернай С.А., Черевко І.М.

СХЕМА АПРОКСИМАЦІЇ ПІДВИЩЕНОЇ ТОЧНОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Пернай С.А., Черевко І.М. *Схема апроксимації підвищеної точності диференціальних рівнянь нейтрального типу* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3. №1. — С. 112–123.

Досліджено властивості розв'язку початкової задачі для диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу. Уточнено оцінку наближення елемента запізнення схемою підвищеної точності, за допомогою якої побудовано та обґрунтовано схему апроксимації підвищеної точності рівняння нейтрального типу послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь.

Вступ

Схема апроксимації лінійних диференціально-різницевих рівнянь (ДРР) послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь вперше була запропонована М.М. Красовським [1] при дослідженні задачі про синтез оптимального регулятора в системах із запізненням. Точність апроксимації нелінійних ДРР із запізненням досліджена Ю.М. Репіним в [6]. У цій роботі вперше досліджується апроксимація скалярного елемента запізнення у випадку, коли його вхідна функція є диференційовною, або задовольняє умову Ліпшиця. Подальше вивчення схем апроксимації ДРР в просторах неперервних функцій на скінченому інтервалі здійснено в роботах І.М. Черевка та Л.А. Піддубної [4, 5]. Дослідження схеми апроксимації системи диференціально-різницевого та різницевого рівнянь дозволило поширити схему Красовського-Репіна на випадок ДРР нейтрального типу за Хейлом [8]. Аналіз точності апроксимації векторного елемента запізнення для різних вхідних функцій та узагальнення схем апроксимації для систем ДРР запізнюючого і нейтрального типів здійснено в роботах І.М. Черевка та О.В. Матвія [2, 3]. Схема апроксимації ДРР із запізненням підвищеної точності запропонована у роботах [11, 9]. Метою даної роботи є поширення схеми апроксимації підвищеної точності для ДРР нейтрального типу.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34K07, 34K28, 34K40.

Ключові слова і фрази: схема апроксимації підвищеної точності, диференціально-різницеве рівняння, диференціальні рівняння нейтрального типу, оцінка наближення.

1 Постановка задачі. Схема апроксимації

Розглянемо диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), x'(t-\tau)), \ t \in [0, T], \tag{1}$$

з початковою умовою

$$x(t) = \varphi_0(t), \ x'(t) = \varphi_0'(t), \ t \in [-\tau, 0], \tag{2}$$

де $\tau > 0$; $f(t, u_0, u_1, u_1')$ — неперервна функція, визначена для $t \in [0, T]$, $u_0, u_1, u_1' \in R$, що задовольняє умову Ліпшиця

$$|f(t_1, u_0, u_1, u_1') - f(t_2, v_0, v_1, v_1')| \le K(|t_1 - t_2| + |u_0 - v_0| + |u_1 - v_1| + |u_1' - v_1'|), \tag{3}$$

$K > 0$, $t_1, t_2 \in [0, T]$; $\varphi_0(t)$ — задана при $t \in [-\tau, 0]$ диференційовна функція, похідна якої задовольняє умову Ліпшиця

$$|\varphi_0'(t_1) - \varphi_0'(t_2)| \le L_0|t_1 - t_2|, \ L_0 > 0, \ t_1, t_2 \in [-\tau, 0]. \tag{4}$$

Визначимо функції $z_j(t)$, $j = \overline{0, m}$, як розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &z_0'(t) = f(t, z_0(t), z_m(t), z_m'(t)), \\ &\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{m}\right)^2 z_j'' + \frac{\tau}{m} z_j' + z_j = z_{j-1}, \quad j = \overline{1, m} \end{aligned} \tag{5}$$

з початковими умовами

$$z_0(0) = \varphi_0(0), \quad z_j(0) = \varphi_0(-\tfrac{j\tau}{m}), \quad z_j'(0) = \varphi_0'(-\tfrac{j\tau}{m}), \ j = \overline{1, m}. \tag{6}$$

Вважатимемо, що розв'язок задачі Коші (5)–(6) апроксимує розв'язок початкової задачі (1)–(2), якщо

$$\left| x\left(t - \tfrac{\tau j}{m}\right) - z_j(t) \right| \to 0, \ j = \overline{0, m}, \ t \in [0, T] \text{ при } m \to \infty.$$

2 Властивості розв'язків початкової задачі (1)–(2)

При наведених в першому пункті умовах розв'язок початкової задачі (1)–(2) буде неперервно-диференційовною функцією на $[-\tau, T]$ за можливим винятком точок $t = k\tau, k = 0, 1, \ldots$. Для існування похідної розв'язку в точці $t = 0$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова склейки (див. [10])

$$\varphi_0'(0) = f(0, \varphi_0(0), \varphi_0(-\tau), \varphi_0'(-\tau)). \tag{7}$$

Легко бачити, що при виконанні умови (7) розв'язок задачі (1)–(2) також неперервно-диференційовний в точках $t = k\tau, k = 1, 2, \ldots$.

Лема 2.1. *Нехай справджуються умови (3),(4) та виконується умова склейки (7). Тоді розв'язок $x(t)$ початкової задачі (1)–(2) — неперервно-диференційовний на $[-\tau,T]$ і $x'(t)$ задовольняє умову Ліпшиця*

$$|x'(t_1)-x'(t_2)|\le L|t_1-t_2|,\quad L>0,\ t_1,t_2\in[-\tau,T]. \tag{8}$$

Доведення. Розв'язуючи задачу (1)–(2) методом кроків, дістаємо послідовність задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь

$$x'(t)=f(t,x(t),\varphi_k(t-\tau),\varphi_k'(t-\tau)),\ t\in[k\tau,(k+1)\tau], \tag{9}$$

$$x(k\tau)=\varphi_k(k\tau),\ k=0,1,2,\ldots. \tag{10}$$

При виконанні умови (3) існує єдиний розв'язок $x(t)=\varphi_{k+1}(t)$, $k=0,1,2,\ldots$, задачі (9)–(10), причому $\varphi_{k+1}(t)\in C^1[k\tau,(k+1)\tau]$, $k=0,1,2,\ldots$.

Якщо умова (7) справджується, тоді розв'язок початкової задачі (1)–(2) буде неперервно-диференційовний в точці $t=0$ [10] і, як видно з рівняння (1), $x'(t)$ буде неперервною в точках $t=k\tau$, $k=1,2,\ldots$. Таким чином, при виконанні умов (3),(7) розв'язок початкової задачі (1)–(2) — неперервно-диференційовний на $[-\tau,T]$.

Покажемо, що умова (8) також справджується. Спочатку розглянемо відрізок $[-\tau,\tau]$.

1) Якщо $t_1,t_2\in[-\tau,0]$, то (8) справджується згідно умови (4) при $L=L_0$.

2) Нехай $t_1,t_2\in[0,\tau]$. При $t\in[0,\tau]$ розв'язок $x(t)=\varphi_1(t)$ початкової задачі (1)–(2) неперервно-диференційовний. Тоді, використовуючи властивості функцій $\varphi_0(t),\varphi_1(t)$ і умови (3)–(4), маємо

$$|x'(t_1)-x'(t_2)|=|f(t_1,x(t_1),\varphi_0(t_1-\tau),\varphi_0'(t_1-\tau))-f(t_2,x(t_2),\varphi_0(t_2-\tau),\varphi_0'(t_2-\tau))|\le$$
$$K(|t_1-t_2|+|\varphi_1(t_1)-\varphi_1(t_2)|+|\varphi_0(t_1-\tau)-\varphi_0(t_2-\tau)|+|\varphi_0'(t_1-\tau)-\varphi_0'(t_2-\tau)|)\le$$
$$K(|t_1-t_2|+\max_{s\in[0,\tau]}|\varphi_1'(s)||t_1-t_2|+\max_{s\in[-\tau,0]}|\varphi_0'(s)||t_1-t_2|+L_0|t_1-t_2|)=$$
$$K(1+\max_{s\in[0,\tau]}|\varphi_1'(s)|+\max_{s\in[-\tau,0]}|\varphi_0'(s)|+L_0)|t_1-t_2|.$$

3) Якщо $t_1\in[-\tau,0]$, а $t_2\in[0,\tau]$, то одержуємо

$$|x'(t_1)-x'(t_2)|=|\varphi_0'(t_1)-x'(t_2)|=|\varphi_0'(t_1)-\varphi_0'(0)+\varphi_0'(0)-x'(t_2)|\le|\varphi_0'(t_1)-\varphi_0'(0)|+|x'(0)-$$
$$x'(t_2)|<L_0|t_1-0|+|f(0,\varphi_1(0),\varphi_0(-\tau),\varphi'(-\tau))-f(t_2,\varphi_1(t_2),\varphi_0(t_2-\tau),\varphi_0'(t_2-\tau))|\le$$
$$L_0|t_1-t_2|+K(|0-t_2|+\max_{s\in[0,\tau]}|\varphi_1'(s)||0-t_2|+\max_{s\in[-\tau,0]}|\varphi_0'(s)||0-t_2|+L_0|0-t_2|)\le$$
$$(L_0+K(1+\max_{s\in[0,\tau]}|\varphi_1'(s)|+\max_{s\in[-\tau,0]}|\varphi_0'(s)|+L_0))|t_1-t_2|.$$

Отже, $x'(t)$ задовольняє умову Ліпшиця на $[-\tau,\tau]$:

$$|x'(t_1)-x'(t_2)|\le L_1|t_1-t_2|,\quad L_1>0,\ t_1,t_2\in[-\tau,\tau],$$

де $L_1=L_0+K(1+\max_{s\in[0,\tau]}|\varphi_1'(s)|+\max_{s\in[-\tau,0]}|\varphi_0'(s)|+L_0)$.

Припустимо, що розв'язок задачі (1)–(2) задовольняє умову (8) при $t\in[-\tau,j\tau]$, $j\ge1$, з $L=L_j$. Покажемо, що ця умова справедлива для $t\in[-\tau,(j+1)\tau]$.

1) Якщо $t_1,t_2\in[-\tau,j\tau]$, то властивість (8) справджується за припущення з $L=L_j$.

2) Нехай $t_1,t_2\in[j\tau,(j+1)\tau]$. На цьому відрізку розв'язок $x(t)=\varphi_{j+1}(t)$ початкової задачі (1)–(2) — неперервно-диференційовний. Тоді, використовуючи властивості функцій $\varphi_j(t)$, $\varphi_{j+1}(t)$ і умову (3), маємо

$$|x'(t_1)-x'(t_2)|=|f(t_1,x(t_1),\varphi_j(t_1-\tau),\varphi_j'(t_1-\tau))-f(t_2,x(t_2),\varphi_j(t_2-\tau),\varphi_j'(t_2-\tau))|\le$$
$$K(1+\max_{s\in[j\tau,(j+1)\tau]}|\varphi_{j+1}'(s)|+\max_{s\in[(j-1)\tau,j\tau]}|\varphi_j'(s)|+L_j)|t_1-t_2|.$$

3) Якщо $t_1\in[p\tau,(p+1)\tau]$, $0\le p\le j$, $t_2\in[j\tau,(j+1)\tau]$, то маємо

$$|x'(t_1)-x'(t_2)|=|f(t_1,x(t_1),\varphi_p(t_1-\tau),\varphi_p'(t_1-\tau))-f(t_2,x(t_2),\varphi_j(t_2-\tau),\varphi_j'(t_2-\tau))|\le$$
$$K(|t_1-t_2|+|\varphi_{p+1}(t_1)-\varphi_{j+1}(t_2)|+|\varphi_p(t_1-\tau)-\varphi_j(t_2-\tau)|+|\varphi_p'(t_1-\tau)-\varphi_j'(t_2-\tau)|)\le$$
$$K(|t_1-t_2|+|\varphi_{p+1}(t_1)-\varphi_{p+1}((p+1)\tau)+\varphi_{p+2}((p+1)\tau)-\ldots+\varphi_{j+1}(j\tau)-\varphi_{j+1}(t_2)|+$$
$$|\varphi_p(t_1-\tau)-\varphi_p(p\tau)+\varphi_{p+1}(p\tau)-\ldots+\varphi_j((j-1)\tau)-\varphi_j(t_2-\tau)||\varphi_p'(t_1-\tau)-\varphi_p'(p\tau)+\varphi_{p+1}'(p\tau)-\ldots+$$
$$\varphi_j'((j-1)\tau)-\varphi_j'(t_2-\tau)|\le K(1+\max_{s\in[(p-1)\tau,p\tau]}|\varphi_p'(s)|+2(\max_{s\in[p\tau,(p+1)\tau]}|\varphi_{p+1}'(s)|+\ldots+$$
$$\max_{s\in[(j-1)\tau,j\tau]}|\varphi_j'(s)|)+\max_{s\in[j\tau,(j+1)\tau]}|\varphi_{j+1}'(s)|+L_p+L_{p+1}+\ldots+L_j)|t_1-t_2|.$$

4) При $t_1\in[-\tau,0]$, $t_2\in[j\tau,(j+1)\tau]$ аналогічно одержуємо, що

$$|x'(t_1)-x'(t_2)|\le(L_0+K(1+\max_{s\in[-\tau,0]}|\varphi_0'(s)|+2(\max_{s\in[0,\tau]}|\varphi_1'(s)|+\ldots+$$
$$\max_{s\in[(j-1)\tau,j\tau]}|\varphi_j'(s)|)+\max_{s\in[j\tau,(j+1)\tau]}|\varphi_{j+1}'(s)|+L_0+\ldots+L_j)|t_1-t_2|\le L_{j+1}|t_1-t_2|.$$

Отже, $x'(t)$ задовольняє умову Ліпшиця при $t\in[-\tau,(j+1)\tau]$ з $L=L_{j+1}$. Оскільки j — довільне ціле, то умова (8) справджується при $t\in[-\tau,T]$. Лема 2.1 доведена. □

3 Апроксимація елемента запізнення

Лема 3.1. *Розглянемо задачу Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь*

$$\begin{array}{l}\frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2z_1''(t)+\frac{\tau}{m}z_1'(t)+z_1(t)=x(t),\\ \frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2z_j''(t)+\frac{\tau}{m}z_j'(t)+z_j(t)=z_{j-1}(t),\quad j=\overline{2,m},\end{array} \tag{11}$$

$$z_j(0)=x(-\tfrac{j\tau}{m}),\quad z_j'(0)=x'(-\tfrac{j\tau}{m}),\quad j=\overline{1,m}, \tag{12}$$

де $x(t)$ — функція, визначена на $[-\tau,T]$, похідна якої задовольняє умову Ліпшиця, τ,T сталі. Тоді для $m>2\tau$ справедливими будуть співвідношення

$$\left|z_j(t)-x(t-\tfrac{j\tau}{m})\right|\le\frac{A_1}{m},\ j=\overline{1,m},\ t\in[0,T], \tag{13}$$

$$\left|z_j'(t)-x'(t-\tfrac{j\tau}{m})\right|\le\frac{A_2}{m},\ j=\overline{1,m},\ t\in[0,T], \tag{14}$$

де $A_1,A_2>0$ — сталі, що не залежить від j та m.

Доведення. Розглянемо спочатку задачу

$$\frac{\tau^2}{2}z''(t)+\tau z'(t)+z(t)=x(t),\ \ z(0)=x(-\tau),\ \ z'(0)=x'(-\tau). \tag{15}$$

Позначимо $y(t)=x(t-\tau)$ і оцінимо різниці $\varepsilon(t)=z(t)-y(t)$ та $\varepsilon'(t)=z'(t)-y'(t)$. Згідно (15), $\varepsilon(t)$ є розв'язком задачі Коші

$$\varepsilon''(t)+\frac{2}{\tau}\varepsilon'(t)+\frac{2}{\tau^2}\varepsilon(t)=\varphi(t),\ \ \varepsilon(0)=0,\ \ \varepsilon'(0)=0, \tag{16}$$

де $\varphi(t)=\frac{2}{\tau^2}[x(t)-x(t-\tau)-\tau x'(t-\tau)]-x''(t-\tau)$. Якщо $x''(t)$ задовольняє умову Ліпшиця із сталою K_2, то $|\varphi(t)|\le K_2\tau$. Для розв'язку задачі (16) маємо зображення

$$\varepsilon(t)=\int\limits_0^t \tau e^{-\frac{t-s}{\tau}}\sin\frac{t-s}{\tau}\varphi(s)ds, \tag{17}$$

$$\varepsilon'(t)=-\int\limits_0^t e^{-\frac{t-s}{\tau}}\sin\frac{t-s}{\tau}\varphi(s)ds+\int\limits_0^t e^{-\frac{t-s}{\tau}}\cos\frac{t-s}{\tau}\varphi(s)ds. \tag{18}$$

Враховуючи оцінку для $\varphi(t)$, із (17) та (18) одержуємо

$$|\varepsilon(t)|\le K_2\tau^3, \tag{19}$$

$$|\varepsilon'(t)|\le 2K_2\tau^2. \tag{20}$$

Розглянемо тепер систему диференціальних рівнянь (11). Позначимо $y_j(t)=x(t-\frac{j\tau}{m})$ і оцінимо різниці $\varepsilon_j(t)=z_j(t)-y_j(t)$, $\varepsilon_j'(t)=z_j'(t)-y_j'(t)$. Виходячи із оцінок (19) та (20), маємо

$$|\varepsilon_1(t)|=|z_1(t)-y_1(t)|\le K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3,$$

$$|\varepsilon_1'(t)|=|z_1'(t)-y_1'(t)|\le 2K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2.$$

Оскільки $z_1(t)=y_1(t)+\varepsilon_1(t)$, то представимо $z_2=z_2^1+z_2^2$, де z_2^1 і z_2^2 є розв'язками таких задач Коші

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2(z_2^1(t))''+\frac{\tau}{m}(z_2^1(t))'+z_2^1(t)=y_1(t),\ \ z_2^1(0)=y_2(0),\ \ (z_2^1(0))'=y_2'(0); \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2(z_2^2(t))''+\frac{\tau}{m}(z_2^2(t))'+z_2^2(t)=\varepsilon_1(t),\ \ z_2^2(0)=0,\ \ (z_2^2(0))'=0. \tag{22}$$

В цьому випадку одержуємо

$$|\varepsilon_2(t)|=|z_2(t)-y_2(t)|\le|z_2^1(t)-y_2(t)|+|z_2^2(t)|\le K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3+|z_2^2(t)|,$$

$$|\varepsilon_2'(t)|=|z_2'(t)-y_2'(t)|\le|(z_2^1(t))'-y_2'(t)|+|(z_2^2(t))'|\le 2K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2+|(z_2^2(t))'|.$$

Для розв'язку задачі (22) маємо явне зображення $z_2^2(t)=\int\limits_0^t\frac{\tau}{m}e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}\sin\frac{m}{\tau}(t-s)\varepsilon_1(s)ds$.

Тоді

$$|z_2^2(t)|=\Big|\int\limits_0^t\frac{\tau}{m}e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}\sin\frac{m}{\tau}(t-s)\varepsilon_1(s)ds\Big|\le K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3\int\limits_0^t\frac{\tau}{m}e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}ds\le K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3\frac{\tau^2}{m^2},$$

$$|(z_2^2(t))'|=\Big|-\int\limits_0^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}\sin\frac{m}{\tau}(t-s)\varepsilon_1(s)ds+\int\limits_0^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}\cos\frac{m}{\tau}(t-s)\varepsilon_1(s)ds\Big|$$

$$\le 2K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3\int\limits_0^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}ds\le 2K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^4.$$

Отже, маємо

$$|\varepsilon_2(t)|\le K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3+K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3\frac{\tau^2}{m^2}=K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3\Big(1+\frac{\tau^2}{m^2}\Big),$$

$$|\varepsilon_2'(t)|\le 2K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2+2K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^4=2K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2\Big(1+\frac{\tau^2}{m^2}\Big).$$

Продовжуючи аналогічно, одержимо при $m>2\tau$

$$|\varepsilon_j(t)|\le K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3\Big(1+\frac{\tau^2}{m^2}+\frac{\tau^4}{m^4}+\ldots+\frac{\tau^{2(j-1)}}{m^{2(j-1)}}\Big)\le$$

$$K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3\Big(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^{2j}}+\ldots\Big)=\frac{4}{3}K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3,\quad j=\overline{1,m}. \tag{23}$$

$$|\varepsilon_j'(t)|\le 2K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2\Big(1+\frac{\tau^2}{m^2}+\frac{\tau^4}{m^4}+\ldots+\frac{\tau^{2(j-1)}}{m^{2(j-1)}}\Big)\le$$

$$2K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2\Big(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^{2j}}+\ldots\Big)=\frac{8}{3}K_2\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2,\quad j=\overline{1,m}. \tag{24}$$

Звідси випливає, що $z_j(t)\to x(t-\frac{j\tau}{m})$ і $z_j'(t)\to x'(t-\frac{j\tau}{m})$, $j=\overline{1,m}$, рівномірно на $[0,T]$ при $m\to\infty$. Послабимо тепер умови на $x(t)$. Припустимо, що $x'(t)$ задовольняє умову Ліпшиця із сталою K_1 і $|x'(t)|<M_1$ при $t\in[-\tau,T]$. Продовжимо функцію $x(t)$ на інтервал $[-\tau,T+h]$, $h>0$, поклавши $x(t)=0$ при $t\notin[-\tau,T]$. Розглянемо згладжену функцію

$$x_1(t)=\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h}x(s)ds,\quad t\in[-\tau,T].$$

друга похідна якої задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $\frac{2K_1}{h}$.

Оцінимо функцію $x_2(t)=x(t)-x_1(t)$ і її похідну

$$|x_2(t)|=\Big|x(t)-\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h}x(s)ds\Big|=\Big|x(t)-\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h}[x(t)+x'(\theta s)(s-t)]ds\Big|\le\frac{M_1h}{2}, \tag{25}$$

$$|x_2'(t)| = \left|x'(t) - \frac{1}{h}(x(t+h) - x(t))\right| = \left|\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h}(x'(t) - x'(s))ds\right| \le \left|\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} K_1(t-s)ds\right| = \frac{K_1h}{2}. \tag{26}$$

Розглянемо тепер задачу (15), де $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Покладемо $z(t) = z_1(t) + z_2(t)$, $z_1(t)$ і $z_2(t)$ — розв'язки таких задач

$$\frac{\tau^2}{2}z_1''(t) + \tau z_1'(t) + z_1(t) = x_1(t), \ z_1(0) = x_1(-\tau), \ z_1'(0) = x_1'(-\tau); \tag{27}$$

$$\frac{\tau^2}{2}z_2''(t) + \tau z_2'(t) + z_2(t) = x_2(t), \ z_2(0) = x_2(-\tau), \ z_2'(0) = x_2'(-\tau). \tag{28}$$

Оцінимо різниці $z(t) - x(t-\tau)$ і $z'(t) - x'(t-\tau)$. Маємо

$$|z(t) - x(t-\tau)| = |z_1(t) + z_2(t) - x_1(t-\tau) - x_2(t-\tau)| \le |z_1(t) - x_1(t-\tau)| + |z_2(t)| + |x_2(t-\tau)|.$$

Тоді $|z'(t) - x'(t-\tau)| \le |z_1'(t) - x_1'(t-\tau)| + |z_2'(t)| + |x_2'(t-\tau)|$. Оскільки друга похідна функції $x_1(t)$ задовольняє умову Ліпшиця із сталою $\frac{2K_1}{h}$, то, згідно (19) та (20),

$$|z_1(t) - x_1(t-\tau)| \le \frac{2K_1}{h}\tau^3, \tag{29}$$

$$|z_1'(t) - x_1'(t-\tau)| \le \frac{4K_1}{h}\tau^2. \tag{30}$$

Для $x_2(t-\tau)$ та $x_2'(t-\tau)$ справедливі оцінки (25),(26), тому

$$|x_2(t-\tau)| \le \frac{M_1h}{2}, \quad |x_2'(t-\tau)| \le \frac{K_1h}{2}.$$

Функція $z_2(t)$ є розв'язком задачі (28), тому мають місце рівності

$$z_2(t) = x_2(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\frac{t}{\tau} + (\tau x_2'(-\tau) + x_2(-\tau))e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\frac{t}{\tau} + \int\limits_0^t \tau e^{-\frac{t-s}{\tau}}\sin\frac{t-s}{\tau}x_2(s)ds.$$

$$z_2'(t) = -\frac{1}{\tau}x_2(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\frac{t}{\tau} - \frac{1}{\tau}x_2(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\frac{t}{\tau} - \frac{1}{\tau}(\tau x_2'(-\tau) + x_2(-\tau))e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\frac{t}{\tau}$$

$$+\frac{1}{\tau}(\tau x_2'(-\tau) + x_2(-\tau))e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\frac{t}{\tau} - \int\limits_0^t e^{-\frac{t-s}{\tau}}\sin\frac{t-s}{\tau}x_2(s)ds + \int\limits_0^t e^{-\frac{t-s}{\tau}}\cos\frac{t-s}{\tau}x_2(s)ds.$$

Тоді маємо оцінки

$$|z_2(t)| \le \left|x_2(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\frac{t}{\tau}\right| + \left|(\tau x_2'(-\tau) + x_2(-\tau))e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\frac{t}{\tau}\right| + \int\limits_0^t \left|\tau e^{-\frac{t-s}{\tau}}\sin\frac{t-s}{\tau}x_2(s)\right|ds \le$$

$$\frac{M_1h}{2} + \frac{\tau K_1h}{2} + \frac{M_1h}{2} + \tau^2\frac{M_1h}{2}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \le h\Big(M_1 + \frac{\tau K_1}{2} + \frac{M_1\tau^2}{2}\Big).$$

$$|z_2'(t)| \le \left| -\frac{1}{\tau}x_2(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\frac{t}{\tau}\right| + \left| -\frac{1}{\tau}x_2(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\frac{t}{\tau}\right| + \left| -\frac{1}{\tau}(\tau x_2'(-\tau) + \right.$$

$$\left. x_2(-\tau))e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\frac{t}{\tau}\right| + \left|\frac{1}{\tau}(\tau x_2'(-\tau) + x_2(-\tau))e^{-\frac{t}{\tau}}\cos\frac{t}{\tau}\right| + \int\limits_0^t \left| -e^{-\frac{t-s}{\tau}}\right|\left|\sin\frac{t-s}{\tau}\right|\left|x_2(s)\right|ds +$$

$$\int\limits_0^t e^{-\frac{t-s}{\tau}}\left|\cos\frac{t-s}{\tau}\right|\left|x_2(s)\right|ds \le \frac{2M_1h}{\tau} + K_1h + M_1h\tau\Big(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\Big) \le h\Big(\frac{2M_1}{\tau} + K_1 + M_1\tau\Big).$$

Отже,

$$|z(t) - x(t-\tau)| \le \frac{2K_1}{h}\tau^3 + h\Big(\frac{3}{2}M_1 + \frac{\tau K_1}{2} + \frac{\tau^2M_1}{2}\Big),$$

$$|z'(t) - x'(t-\tau)| \le \frac{4K_1}{h}\tau^2 + h\Big(\frac{2M_1}{\tau} + \frac{3K_1}{2} + M_1\tau\Big).$$

Розглядаючи тепер систему рівнянь (11), де $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, і проводячи аналогічні оцінки, одержуємо

$$\left|z_j(t) - x(t - \frac{j\tau}{m})\right| \le \frac{8K_1}{3h}\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3 + h\Big(\frac{3}{2}M_1 + \frac{\tau K_1}{2} + \frac{M_1\tau^2}{2}\Big) =$$

$$\frac{8K_1}{3h}\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^3 + hB_1, \quad B_1 = \Big(\frac{3}{2}M_1 + \frac{\tau K_1}{2} + \frac{M_1\tau^2}{2}\Big). \tag{31}$$

$$\left|z_j'(t) - x'\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big)\right| \le \frac{32K_1}{3h}\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2 + h\Big(\frac{2M_1}{\tau} + \frac{3K_1}{2} + M_1\tau\Big) =$$

$$\frac{32K_1}{3h}\Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2 + hB_2, \quad B_2 = \Big(\frac{2M_1}{\tau} + \frac{3K_1}{2} + M_1\tau\Big). \tag{32}$$

Покладемо в нерівностях (31),(32) $h = \frac{\tau}{m}$, маємо

$$\left|z_j(t) - x(t - \frac{j\tau}{m})\right| \le \frac{1}{m}\Big(\frac{8K_1\tau^2}{3m} + \tau B_1\Big) \le \frac{A_1}{m}, \quad A_1 = \frac{8K_1\tau}{3} + \tau B_1.$$

$$\left|z_j'(t) - x'(t - \frac{j\tau}{m})\right| \le \frac{1}{m}\Big(\frac{32K_1\tau}{3} + \tau B_2\Big) = \frac{A_2}{m}, \quad A_2 = \frac{32K_1\tau}{3} + \tau B_2.$$

Лема 3.1 доведена. □

4 Обґрунтування схеми апроксимації

Теорема 1. *Нехай $z_j(t)$, $j = \overline{0,m}$ — розв'язок задачі Коші (5)–(6), а $x(t)$ — розв'язок початкової задачі (1)–(2) і справджуються умови (3),(4),(7). Тоді розв'язок задачі Коші (5)–(6) апроксимує розв'язок початкової задачі (1)–(2), і мають місце співвідношення*

$$\left|x\Big(t - \frac{\tau j}{m}\Big) - z_j(t)\right| \le \frac{B_1}{m}, \ j = \overline{0,m}, \ t \in [0,T], \tag{33}$$

$$\left|x'\Big(t - \frac{\tau j}{m}\Big) - z_j'(t)\right| \le \frac{B_2}{m}, \ j = \overline{0,m}, \ t \in [0,T], \tag{34}$$

де $B_1, B_2 > 0$ — сталі, що не залежать від j та m.

Доведення. Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь (5) з початковими умовами (6). Нехай

$$N_j(t) = \max_{0\le s\le t}\left|x\Big(s - \frac{\tau j}{m}\Big) - z_j(s)\right|, \ j = \overline{0,m}, \ t\in[0,T]. \tag{35}$$

$$M_j(t) = \max_{0\le s\le t}\left|x'\Big(s - \frac{\tau j}{m}\Big) - z_j'(s)\right|, \ j = \overline{0,m}, \ t\in[0,T]. \tag{36}$$

Представимо $z_j(t)$, $j=\overline{1,m}$ у вигляді суми $z_j(t) = z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t)$, де $z_j^{(1)}(t)$ та $z_j^{(2)}(t)$ є розв'язками таких задач Коші:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2 z_1^{''(1)} + \frac{\tau}{m} z_1^{'(1)} + z_1^{(1)} = x(t), \\ \frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2 z_j^{''(1)} + \frac{\tau}{m} z_j^{'(1)} + z_j^{(1)} = z_{j-1}^{(1)}(t), j = \overline{2,m}, \\ z_j^{(1)}(0) = x(-\frac{j\tau}{m}), \ z_j^{'(1)}(0) = x'(-\frac{j\tau}{m}), j = \overline{1,m}; \end{array} \tag{37}$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2 z_1^{''(2)} + \frac{\tau}{m} z_1^{'(2)} + z_1^{(2)} = z_0(t) - x(t), \\ \frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2 z_j^{''(2)} + \frac{\tau}{m} z_j^{'(2)} + z_j^{(2)} = z_{j-1}^{(2)}(t), j = \overline{2,m}, \\ z_j^{(2)}(0) = 0, \ z_j^{'(2)}(0) = 0, j = \overline{1,m}. \end{array} \tag{38}$$

Оцінимо різниці $|z_j(t) - x(t - \frac{j\tau}{m})|$ та $|z_j'(t) - x'(t - \frac{j\tau}{m})|$. Враховуючи вигляд систем (37),(38), маємо

$$\left|z_j(t) - x\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big)\right| = \left|z_j^{(1)}(t) + z_j^{(2)}(t) - x\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big)\right| \le \left|z_j^{(1)}(t) - x\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big)\right| + |z_j^{(2)}(t)|,$$

$$\left|z_j'(t) - x'\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big)\right| \le \left|z_j'^{(1)}(t) - x'\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big)\right| + |z_j'^{(2)}(t)|.$$

Покажемо методом математичної індукції, що для доданків $|z_j^{(2)}(t)|$ та $|z_j'^{(2)}(t)|$ справедливі оцінки

$$|z_j^{(2)}(t)| \le N_0(t), \ j = \overline{1,m}, \ t\in[0,T], \tag{39}$$

$$|z_j'^{(2)}(t)| \le 2N_0(t), \ j = \overline{1,m}, \ t\in[0,T]. \tag{40}$$

Для розв'язку рівняння $\frac{1}{2}(\frac{\tau}{m})^2 z_1^{''(2)} + \frac{\tau}{m} z_1^{'(2)} + z_1^{(2)} = z_0(t) - x(t)$, з початковими умовами $z_1^{(2)}(0) = 0$, $z_1^{'(2)}(0) = 0$, $z_1^{(2)}(t)$ має вигляд

$$z_1^{(2)}(t) = \frac{\tau}{m}\int_0^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}\sin\Big(\frac{m}{\tau}(t-s)\Big)[z_0(s) - x(s)]ds.$$

Тоді при $m > \tau$

$$|z_1^{(2)}(t)| \le \Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2 N_0(t) \le N_0(t),$$

$$|z_1'^{(2)}(t)| \le \Big(\frac{\tau}{m}\Big)^2 2N_0(t) \le 2N_0(t).$$

Припустимо, що нерівності (39),(40) справджується при $k = j$, а саме $|z_j^{(2)}(t)| \le N_0(t)$, $|z_j'^{(2)}(t)| \le 2N_0(t)$. Покажемо, що вони будуть справедливі при $k = j+1$:

$$|z_{j+1}^{(2)}(t)| = \frac{\tau}{m}\int_0^t e^{-\frac{m(t-s)}{\tau}}\left|\sin\frac{m(t-s)}{\tau}\right||z_j^{(2)}(s)|ds \le \frac{\tau}{m}N_0(t)\int_0^t e^{-\frac{m(t-s)}{\tau}}ds \le N_0(t),$$

$$|z_{j+1}'^{(2)}(t)| = 2\frac{\tau}{m}\int_0^t e^{-\frac{m(t-s)}{\tau}}|z_j^{(2)}(s)|ds \le 2\frac{\tau}{m}N_0(t)\int_0^t e^{-\frac{m(t-s)}{\tau}}ds \le 2N_0(t).$$

Отже, нерівності (39),(40) мають місце.

Для системи (37) виконуються умови леми 3.1, тому

$$\left|z_j^{(1)}(t) - x\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big)\right| \le \frac{A_1}{m}, \ j = \overline{1,m}, \ t\in[0,T], \ A_1 > 0,$$

$$\left|z_j'^{(1)}(t) - x'\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big)\right| \le \frac{A_2}{m}, \ j = \overline{1,m}, \ t\in[0,T], \ A_2 > 0.$$

Отже,

$$\left|z_j(t) - x\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big)\right| \le \frac{A_1}{m} + N_0(t), \ j = \overline{1,m}, \ t\in[0,T], \tag{41}$$

$$\left|z'_j(t) - x'\Big(t - \frac{j\tau}{m}\Big)\right| \le \frac{A_2}{m} + 2N_0(t), \ j = \overline{1,m}, \ t\in[0,T]. \tag{42}$$

Нерівності (41),(42) справджується для всіх $t\in[0,T]$. Тому, враховуючи позначення (35),(36), маємо

$$N_j(t) \le N_0(t) + \frac{A_1}{m}, \ j = \overline{1,m}, \ t\in[0,T], \tag{43}$$

$$M_j(t) \le 2N_0(t) + \frac{A_2}{m}, \ j = \overline{1,m}, \ t\in[0,T]. \tag{44}$$

Оцінимо тепер різниці $|x(t) - z_0(t)|$ та $|x'(t) - z_0'(t)|$. Записуючи рівняння (1) і (5) у інтегральному вигляді та враховуючи властивості функції $f(t,u_0,u_1,u'_1)$, одержуємо

$$|x(t) - z_0(t)| \le \int_0^t |f(s,x(s),x(s-\tau),x'(s-\tau)) - f(s,z_0(s),z_m(s),z_m'(s))|ds \le$$

$$L\int_0^t \Big(4N_0(s) + \frac{1}{m}(A_1 + A_2)\Big)ds \le 4L\int_0^t N_0(s)ds + \frac{L}{m}(A_1 + A_2)T. \tag{45}$$

Нерівність (45) справджується для всіх $t\in[0,T]$, тому, враховуючи позначення (35), маємо

$$N_0(t) \le 4L\int_0^t N_0(s)ds + \frac{L}{m}(A_1 + A_2)T.$$

Застосовуючи нерівність Гронуолла-Белмана [11], отримаємо

$$N_0(t) \le \frac{L}{m}(A_1 + A_2)Te^{4LT}.$$

Тепер із нерівностей (43),(44) маємо

$$N_j(t) \le \frac{L}{m}(A_1 + A_2)Te^{4LT} + \frac{A_1}{m} \le \frac{B_1}{m}, \ t\in[0,T], \ j = \overline{1,m},$$

де $B_1 = L(A_1 + A_2)Te^{4LT} + A_1$,

$$M_j(t) \le \frac{2L}{m}(A_1 + A_2)Te^{4LT} + \frac{A_2}{m} \le \frac{B_2}{m}, \ t\in[0,T], \ j = \overline{1,m},$$

де $B_2 = 2L(A_1 + A_2)Te^{4LT} + A_2$.

Теорема доведена. □

5 Приклад

Розглянемо початкову задачу

$$\begin{aligned} &x'(t) = x(t) + 2x(t-1) + x'(t-1), \ t \in [0,1], \\ &x(t) = 2t + \tfrac{2}{3}, \ t \in [-1,0], \\ &x'(t) = 2, \ t \in [-1,0]. \end{aligned} \tag{46}$$

Точний розв'язок задачі (46), знаходимо методом кроків на [0,1]

$$x_m(t) = 4e^t - 4t - \frac{10}{3}, x'_m(t) = 4e^t - 4.$$

Наближений розв'язок $x_н$ задачі (46), знайдений як розв'язок апроксимуючої задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (5). Для числового інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь використовуємо різницеву схему Гіра першого порядку. Результати числових експериментів при різних m наведено в таблицях 1, 2.

Таблиця 1

t	x_m	$x_н(m=8)$	$\triangle_1$	$x_н(m=13)$	$\triangle_2$
0,000000	0,666667	0,666667	0,000000	0,666667	0,000000
0,200000	0,752278	0,752253	-0,000024	0,752253	-0,000024
0,400000	1,033965	1,033903	-0,000063	1,033906	-0,000060
0,600000	1,555142	1,554397	-0,000745	1,554990	-0,000152
0,800000	2,368830	2,353762	-0,015068	2,363890	-0,004941

Таблиця 2

t	x'_m	$x'_н(m=8)$	$\triangle_1$	$x_н(m=13)$	$\triangle_2$
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,200000	0,885611	0,885587	-0,000024	0,885587	-0,000024
0,400000	1,967299	1,967124	-0,000175	1,967239	-0,000060
0,600000	3,288475	3,275736	-0,012739	3,287066	-0,001409
0,800000	4,902164	4,717788	-0,184276	4,816214	-0,085950

Література

1. Красовський Н.Н. *Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием* // ПММ. — 1964. — Т.28, №4. – С. 716–725.
2. Матвій О.В., Черевко І.М. *Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість* // Нелінійні коливання. — 2004. — Т.7, №2. — С. 208–216.
3. Матвій О.В., Черевко І.М. *Про наближення систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу системами звичайних диференціальних рівнянь* // Нелінійні коливання. — 2007. — Т.10. №3. – С. 329–335.

4. Піддубна Л.А., Черевко І.М. *Алгоритм апроксимації диференціально-різницевих рівнянь і моделювання процесів електродинаміки* // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз. - мат. наук. – 1998. № 2. – С. 111–118.
5. Піддубна Л.А., Черевко І.М. *Апроксимація систем диференціально- різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь* // Нелінійні коливання. – 1999. – N1. – С.42–50.
6. Репин Ю.М. *О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями* // ПММ. – 1965. – Т.29. №2. – С.226–245.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
8. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1984. – 421 с.
9. Черевко І.М. *Апроксимація диференціально-різницевих рівнянь і наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів* // Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування. – К. :Ін-т математики АН України. – 1992. – С. 74-84.
10. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука. 1971. – 296 с.
11. Piddubna L.A., Cherevko I.M. *Approximations of differential-difference equations and calculations of nonasymptotic roots of quasipolynomials*, Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations, **28**, 1 (1999), 15-21.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна

Надійшло 01.02.2011

Pernay S.A., Cherevko I.M. *Approximation scheme of higher accuracy of differential equations of neutral type*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 112–123.

The properties of solution of initial problem for differential-difference equation of neutral type were researched. An approximate estimate of element delay was specified by scheme of higher accuracy. The approximate scheme of higher accuracy of neutral equation by a sequence of ordinary differential equations system was constructed and analyzed.

Пернай С.А., Черевко И.М. *Схема аппроксимации повышенной точности дифференциальных уравнений нейтрального типа* // Карпатские математические публикации. 2011. — Т.3. №1. — С. 112–123.

Исследованы свойства решения начальной задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа. Уточнена оценка приближения элемента запаздывания схемой повышенной точности, с помощью которой построена и обоснована схема аппроксимации повышенной точности уравнения нейтрального типа последовательностью систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Карпатські математичні публікації. Т.3. №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3. №1

УДК 515.12+512.58

Savchenko O.

A REMARK ON STATIONARY FUZZY METRIC SPACES

Savchenko O. *A remark on stationary fuzzy metric spaces*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 124–129.

The main result states that the category of stationary fuzzy metric spaces (with respect to an archimedean t-norm) and nonexpanding maps is isomorphic to a full subcategory of the category of metric spaces and nonexpanding maps. The case of non-archimedean t-norms is also discussed.

Introduction

The notion of fuzzy metric space is tightly connected with the notion of probabilistic metric space. The latter is a generalization of the notion of metric space in which the distances take their values in the class of distribution functions. The fuzzy metric spaces found numerous applications, e.g., to the theory of image processing.

The theory of fuzzy metric spaces is developed in different directions. In particular, many authors considered the problem of existence of fixed points in the fuzzy setting (see, e.g. [3], [4]). Also, some functorial constructions in the categories of fuzzy metric spaces were investigated.

There are two main theories of the fuzzy metric spaces. One of them is based on the notion introduced by Kramosil and Michalek in [6]. Another class of fuzzy metric spaces, more restrictive, is defined by George and Veeramani [2]. In this note we deal with a subclass of the latter class, namely, with the so-called stationary fuzzy metric spaces. The obtained results demonstrate that the stationary fuzzy metric spaces with respect to given archimedean (and some non-archimedean) t-norm are tightly connected with the ordinary metric spaces.

In the last section we formulate some open problems related to the results of this note.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54E70, 54E40,54B30.
Key words and phrases: fuzzy metric space, stationary fuzzy metric, ultrametric.

1 Preliminaries

A binary operation $*\colon [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ is called a continuous t-norm if $([0,1],*)$ is an abelian topological monoid with the unit 1 such that $a*b\le c*d$ whenever $a*c$ and $b*d$ for all $a,b,c,d\in[0,1]$.

In the sequel, we will consider the following examples of t-norms:

1. $a*b=\min\{a,b\}$;
2. $a*b=ab$;
3. $a*b=\max\{a+b-1,0\}$ (Lukasiewicz t-norm);
4. $a*b=\dfrac{ab}{\max\{a,b,\alpha\}}$.

A t-norm $*$ is said to be *archimedean* provided for every $x,y\in(0,1)$ there exists $n\in\mathbb{N}$ such that $x*x*x\cdots*x<y$ (here $*$ appears $n-1$ times).

It is well-known (see, e.g. [7]) that any archimedean t-norm $*$ can be represented by means of a continuous additive generator, i.e. a continuous strictly decreasing function $t\colon[0,1]\to[0,\infty]$ with $t(1)=0$ such that

$$x*y=t^{(-1)}(t(x)+t(y)),\quad x,y\in[0,1]$$

(hereafter, $t^{(-1)}(u)=t^{-1}(\min(u,t(0)))$ is the *pseudoinverse* of t).

Definition 1.1. *A triplet $(X,M,*)$ is a FM-space if X is an arbitrary set, $*$ is a continuous t-norm and M is a fuzzy set in $X^2\times[0,\infty)$ satisfying the following conditions for all $x,y,z\in X$ and $t,s>0$:*

(i) $M(x,y)>0$;

(ii) $M(x,y,t)=1$ *for all* $t>0$ *if and only if* $x=y$;

(iii) $M(x,y,t)=M(y,x,t)$;

(iv) $M(x,y,t)*M(y,z,t)\le M(x,z,t+s)$;

(v) $M(x,y,-)\colon[0,\infty)\to[0,1]$ *is continuous.*

Let $(X_i,M_i,*)$, $i=1,2$, be fuzzy metric spaces. A map $f\colon X_1\to X_2$ is called *non-expanding* if $M_1(x,y,t)\le M_2(f(x),f(y),t)$ for any $x,y\in X_1$ and $t>0$. The fuzzy metric spaces and non-expanding maps form a category, which we denote $\mathcal{FMS}(*)$.

If $(X,M,*)$ is a fuzzy metric space, $x\in X$, $r\in(0,1)$ and $t>0$, then the set

$$B(x,r,t)=\{y\in X\mid M(x,y,t)>1-r\}$$

is called the *ball of radius r centered at x for t*. It is known that the family of all balls is a base of a metrizable topology for every fuzzy metric space X (see [2]).

A fuzzy metric M is called *stationary* if the function $M(x,y,-)\colon [0,\infty)\to[0,1]$ is constant for every $x,y\in X$. We write $M(x,y)$ instead of $M(x,y,t)$, and $B(x,r)$ instead of $B(x,r,t)$ for any stationary fuzzy metric M. We denote by $\mathcal{SFMS}(*)$ the full subcategory of the category $\mathcal{FMS}(*)$ whose objects are stationary fuzzy metric spaces.

We say that a metric space (X,d) is of *strong diameter* c if $d(x,y)<c$ for all $x,y\in X$.

Theorem 1. *Let (X,M) be a stationary fuzzy metric space with respect to an archimedean t-norm $*$. Then the function $d=t\circ M$, where t is a continuous additive generator of M, is a metric on X of strong diameter $t(0)$. The topologies on X induced by M and d coincide.*

Moreover, this construction determines a functor from the category $\mathcal{SFMS}(*)$ into the category of metric spaces and nonexpanding maps.

Proof. Let $x,y,z\in X$.

If $d(x,y)=0$, then, since t is strictly decreasing, $M(x,y)=1$ and therefore $x=y$. Also $d(x,x)=t(M(x,y))=t(1)=0$.

Clearly, $d(x,y)=d(y,x)$.

Prove the triangle inequality. We have

$$M(x,y)*M(y,z)=t^{(-1)}(t(M(x,y))+t(M(y,z)))=$$
$$t^{-1}(\min\{t(M(x,y))+t(M(y,z)),0\})\le M(x,z),$$

and therefore applying t to both sides of the above inequality we obtain

$$d(x,y)+d(x,z)=t(M(x,y))+t(M(y,z))\ge\min\{t(M(x,y))+t(M(y,z)),0\}\ge$$
$$t(M(x,z))=d(x,z).$$

Remark also that, since $M(x,y)>0$, we obtain $d(x,y)<t(0)$.

Let $B^d(x,r)=\{y\in X\mid d(x,y)<r\}$. From the fact that $B^d(x,r)=B(x,1-t^{-1}(r))$ it follows that the topologies generated by M and d coincide.

If (X_i,M_i), $i=1,2$, are stationary fuzzy metric spaces and a map $f\colon X_1\to X_2$ is nonexpanding, then this map is easily seen to be nonexpanding with respect to the induced metrics. □

Recall that an ultrametric d on a set X is a metric satisfying

$$d(x,z)\le\max\{d(x,y),d(y,z)\},\quad x,y,z\in X.$$

Proposition 1.1. *Let $*=\min$. The category $\mathcal{SFMS}(*)$ is isomorphic to the category of ultrametric spaces and nonexpanding maps.*

Proof. Define $d(x,y)=1-M(x,y)$. One can easily prove that d is an ultrametric on X. Moreover, the topologies on X induced by d and M coincide. □

Proposition 1.2. *Let $*=\cdot$. The category $\mathcal{SFMS}(*)$ is isomorphic to the category of metric spaces and nonexpanding maps.*

Proof. Since $t=-\ln$ is clearly the continuous additive generator for the t-norm $\cdot$, the assertion follows from Theorem 1. □

Proposition 1.3. *Let $*$ be the Lukasiewicz t-norm. The category $\mathcal{SFMS}(*)$ is isomorphic to the category of metric spaces of strong diameter 1 and nonexpanding maps.*

Proof. It is known (and can be easily seen) that the function t defined by the formula $t(x)=1-x$ is the continuous additive generator for the Lukasiewicz t-norm. Since $t(0)=1$, the assertion follows from Theorem 1. □

2 K-ULTRAMETRIC SPACES

Let X be a set and $K\in[0,\infty]$. A metric d on X is called a K-*ultrametric* if $d(x,y)\le\max\{d(x,z),d(z,y)\}$ whenever $\min\{d(x,z),d(z,y)\}\le K$.

Note that any 0-ultrametric is a metric and any ∞-ultrametric is an ultrametric.

Below we describe a construction which allows us to produce examples of K-ultrametric space. Let (X,ϱ) be an ultrametric space and let $\sim_K$ denote its decomposition into disjoint closed balls of radius K. Denote by $q\colon X\to X/\sim_K$ the quotient map. For any metric D on $X/\sim_K$, the function $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$ defined by the formula $d(x,y)=\varrho(x,y)+D(q(x),q(y))$ is a K-ultrametric on X. Indeed, if $x,y,z\in X$ and $\varrho(x,z)\le K$, $\varrho(z,y)\le K$, then $q(x)=q(z)=q(y)$ and therefore

$$d(x,y)=\varrho(x,y)+D(q(x),q(y))\le\max\{\varrho(x,z),\varrho(x,z)\}+D(q(x),q(z))+D(q(z),q(y))\le$$
$$\max\{\varrho(x,z),\varrho(y,z)\}=\max\{d(x,z),d(y,z)\},$$

and, if, say, $\varrho(x,z)\le K$, $\varrho(z,y)>K$, then $q(x)=q(z)$ and therefore

$$d(x,y)=\varrho(x,y)+D(q(x),q(y))\le\max\{\varrho(x,z),\varrho(y,z)\}+D(q(z),q(y))=$$
$$\varrho(y,z)+D(q(z),q(y))=d(y,z)\le\max\{d(x,z),d(y,z)\}.$$

Theorem 2. *Let $a*b=\frac{ab}{\max\{a,b,\alpha\}}$, where $\alpha\in(0,1)$. Then the category $\mathcal{SFMS}(*)$ is isomorphic to the category of K-ultrametric spaces and nonexpanding maps.*

Proof. Let M be a stationary fuzzy metric. Define $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$ by the formula $d(x,y)=-\ln M(x,y)$. Then, suppose that $x,y,z\in X$ and $\min\{d(x,z),d(z,y)\}\ge-\ln\alpha$. Then $M(x,y)\le e^{\ln\alpha}=\alpha$, $M(y,z)\le\alpha$ and therefore

$$M(x,z)\ge M(x,y)*M(y,z)=\frac{M(x,y)M(y,z)}{\alpha},$$

which in turn implies that $d(x,y)+d(y,z)\ge d(x,z)+\alpha\ge d(x,z)$.

We are going to prove that d is a K-ultrametric on X with $K=-\ln\alpha$. Suppose that $x,y,z\in X$ and $\min\{d(x,z),d(z,y)\}\le K$. Then, say, $M(x,y)\ge\alpha$, whence

$$M(x,z)\ge M(x,y)*M(y,z)=\frac{M(x,y)M(y,z)}{\max\{M(x,y),M(y,z),\alpha\}}\ge$$
$$\frac{M(x,y)M(y,z)}{M(x,y)}\ge\frac{M(x,y)M(y,z)}{\max\{M(x,y),M(y,z)\}}\ge\min\{M(x,y),M(y,z)\},$$

and therefore $d(x,y)\le\max\{d(x,y),d(x,z)\}$. The rest of the proof is left to the reader. □

By $\exp X$ we denote the hyperspace of a topological space X, i.e. the family of nonempty closed subsets in X. It is known [8] that every fuzzy metric M on X generates a fuzzy metric M_H on $\exp X$ (the fuzzy Hausdorff metric) as follows:

$$M_H(A,B,t) = \min\left\{\inf_{a\in A} M(a,B,t), \inf_{b\in B} M(A,b,t)\right\}$$

for every $A, B \in \exp X$ and $t > 0$. Here $M(a,B,t) = \sup\{M(a,b,t) \mid b \in B\}$, $a \in X$, $B \in \exp X$.

Corollary 2.1. *The hyperspace of any K-ultrametric space is again a K-ultrametric space.*

Proof. The result follows from the previous theorem and from the fact that for any stationary fuzzy metric space the fuzzy Hausdorff stationary metric is again a stationary fuzzy metric. □

3 Remarks

Let $(X_i, M_i, *)$, $i = 1, 2$, be fuzzy metric spaces. A map $f\colon X_1 \to X_2$ is called a *contraction* if $M_1(x,y,t) < M_2(f(x), f(y), t)$ for any $x, y \in X_1$ and $t > 0$. The results of the previous sections can be also formulated for the category of (stationary fuzzy) metric spaces and contractions.

For any $k \in (0,1)$ a map $f\colon X \to X$ of a fuzzy metric space $(X, M, *)$ is called a *k-contraction* if

$$\frac{1}{M(f(x), f(y), t)} - 1 \le k\left(\frac{1}{M(x,y,t)} - 1\right)$$

for every $x, y \in X$. A metric analogue of this notion is unknown.

It is known (see, e.g., [1]) that for any continuous t-norm $*$ there exists a unique (finite or countable) index set A, unique pairwise disjoint intervals $(a_\alpha, e_\alpha) \subset [0,1]$, and unique continuous archimedean t-norms $*_\alpha$ such that

$$x * y = \begin{cases} a_\alpha + (e_\alpha - a_\alpha)\left(\frac{x-a_\alpha}{e_\alpha-a_\alpha} *_\alpha \frac{y-a_\alpha}{e_\alpha-a_\alpha}\right), & \text{if } (x,y) \in (a_\alpha, e_\alpha), \\ \min\{x,y\}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The above results lead us to the following question. Is there a category of metric spaces which is isomorphic to the category $\mathcal{SFMS}(*)$?

In the theory of metric spaces, one of the most important roles is played by the Urysohn universal metric spaces [10]. Recall that a metric space (U, d) is called Urysohn universal if U is separable and complete and has the following property: given any finite metric space X, any point $x \in X$, and any isometric embedding $f\colon X \setminus \{x\} \to U$, there exists an isometric embedding $F\colon X \to U$ that extends f. The classical Urysohn theorem asserts that an Urysohn universal metric space exists and is unique up to isometry.

A counterpart of the notion of universal Urysohn metric space in the class of ultrametric spaces is discussed in [9]. Also, there are Urysohn universal spaces for the class of metric spaces of diameter ≤ 1 (see, e.g., [5]).

This allows us to formulate the following problem. Is there a counterpart of the universal Urysohn space for (some subclasses of) the class of separable fuzzy metric spaces?

References

1. Clifford A.H., Preston G.B. The Algebraic Theory of Semigroups. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1961.
2. George A., Veeramani P. *On some results of analysis for fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems, **90** (1997), 365–368.
3. Grabiec M. *Fixed points in fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems, **27** (1988), 385–389.
4. Gregori V., Sapena A. *On fixed-point theorems in fuzzy metric spaces*, Fuzzy Sets and Systems, **125**, 2 (2002), 245–252.
5. Katětov M. *On universal metric spaces*, in: Frolik Z.(ed.), General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra VI. Proceedings of the Sixth Prague Topological Symposium 1986, Heldermann Verlag, Berlin, 1988, 323–330.
6. Kramosil I., Michalek J. *Fuzzy metric and statistical metric spaces*, Kybernetica, **11** (1975), 326–334.
7. Ling C.M. *Representation of associative functions.* Publ. Math. Debrecen, **12** (1965), 189–212.
8. Rodríguez-López J., Romaguera S. *The Hausdorff fuzzy metric on compact sets*, Fuzzy Sets and Systems, **147**, 2 (2004), 273–283.
9. Su Gao, Chuang Shao. *Polish ultrametric Urysohn spaces and their isometry groups*, Topology and its Applications, **158** (2011), 492–508.
10. Urysohn P. *Sur un espace métrique universel*, Bull. Sci. Math., **51** (1927), 43–64, 74–90.

Kherson agrarian university,
Kherson, Ukraine

Received 14.04.2011

Савченко О. *Зауваження про стаціонарні розмиті метричні простори* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — C. 124–129.

Доведено, що категорія стаціонарних розмитих метричних просторів (відносно архімедової t-норми) і нерозтягуючих відображень ізоморфна повній підкатегорії категорії метричних просторів і нерозтягуючих відображень. Розглянуто також випадок неархімедової t-норми.

Савченко А. *Замечание о стационарных нечетких метрических пространствах* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 124–129.

Доказано, что категория стационарных нечетких метрических просторанств (по отношению к архимедовой t-норме) и нерастягивающих отображений изоморфна полной подкатегории категории метрических пространств и нерастягивающих отображений. Рассмотрено также случай неархимедовой t-нормы.

Карпатські математичні публікації. Т.3, №1

Carpathian Mathematical Publications. V.3, №1

УДК 517.98

Семенчук А.В.

ПРО ДЕЯКІ АЛГОРИТМИ ОБЧИСЛЕНЬ ДЛЯ КУБІЧНИХ ПОЛІВ ТА ПОЛІВ ЧЕТВЕРТОГО СТЕПЕНЯ

Семенчук А.В. *Про деякі алгоритми обчислень для кубічних полів та полів четвертого степеня* // Карпатські математичні публікації. — 2011. — Т.3, №1. — С. 130–138.

Побудовано ефективні алгоритми обчислень у кубічних полях та полях четвертого степеня.

Вступ

Вивченню (n,m)-форм $s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}$ числового поля $Q(m)$ степеня n присвячено чимало робіт. При цьому основна увага аналітиків була зосереджена на вивченні їх цілочислових базисів та одиниць. Випадок $n = 2$ в основному досліджений Валлісом в Commercium aepistolicum (1657 р.) Проте окремі аспекти досліджень у цьому напрямку проводяться і нині [4]. Випадок $n = 3$ більш складний. Його досліджували Якобі, Пуанкаре, Гурвіц. Вороний проводив свої дослідження на основі узагальнень неперервних дробів [1]. Техніці роботи з $(3,m)$-формами, які Делоне та Фадеєв називають кубічними числами у [2] присвячено цілий розділ. Алгоритми обчислення степенів (n,m)-форм корисні при дослідженні структури множини фундаментальних одиниць у кільці цілих чисел полів.

У роботі, при допомозі апарату числення трикутних матриць [3] побудовано рекурсивні алгоритми роботи із (n,m)-формами третього та четвертого порядку та наведено ряд прикладів, що ілюструють їх ефективність у порівнянні з алгоритмами, запропонованими у [2].

1 Кубічні рівняння та ірраціональності

Розглянемо кубічні ірраціональності виду

$$x = a + b\sqrt[3]{n} + c\sqrt[3]{n^2}, \tag{1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46-02, 46E30, 46J20.

Ключові слова і фрази: кубічні поля, параперманенти, алгебраїчні ірраціональності.

де a, b, c, n — деякі раціональні числа, що називаються *кубічними формами* [3].

Коефіцієнти кубічного рівняння

$$x^3 = qx^2 + px + r, \tag{2}$$

яке задовольняє кубічна форма (1), можна знайти, розв'язавши відповідну систему рівнянь, або простіше, при допомозі перетворень Чиргаузена [2].

Маємо:

$$\begin{cases} q = 3a, \\ p = 3(cbn - a^2), \\ r = b^3n + c^3n^2 + a^3 - 3abcn \end{cases} \tag{3}$$

Якщо норма кубічної форми дорівнює одиниці, то довільний її степінь також дорівнює одиниці. В зв'язку з цим виникають циклічні групи одиниць. Для генерування елементів таких груп корисними виявляються наступні дві теореми.

Теорема 1. *Якщо $x^3 = qx^2 + px + r$ і $x^m = Q_m x^2 + P_m x + R_m$, то виконуються рівності:*

$$Q_m = \begin{bmatrix} q & & & & & & \\ \frac{p}{q} & q & & & & & \\ \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_{m-2}, \quad P_m = \begin{bmatrix} p & & & & & & \\ \frac{r}{q} & q & & & & & \\ 0 & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_{m-2},$$

$$R_m = \begin{bmatrix} r & & & & & & \\ 0 & q & & & & & \\ 0 & \frac{p}{q} & q & & & & \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & & \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_{m-2}, \quad m = 3, 4, \ldots.$$

Доведення. Маємо $x^{m+1} = Q_{m+1}x^2 + P_{m+1}x + R_{m+1}$. З іншого боку, маємо рівності

$$x^{m+1} = Q_m x^3 + P_m x^2 + R_m x = Q_m(qx^2 + px + r) + P_m x^2 + R_m x =$$

$$(qQ_m + P_m)x^2 + (pQ_m + R_m)x + Q_m r,$$

але коефіцієнти $qQ_m + P_m$, $pQ_m + R_m$, $Q_m r$ є відповідно розкладом параперманентів Q_{m+1}, P_{m+1}, R_{m+1} за елементами першого стовпця. □

Розкладаючи параперманент Q_m у теоремі 1 за елементами останнього рядка, маємо лінійне рекурентне рівняння третього порядку $Q_m = qQ_{m-1} + pQ_{m-2} + rQ_{m-3}$ з початковими умовами $Q_2 = 1$, $Q_{<2} = 0$.

Розкладаючи параперманент для P_m за елементами першого стовпця, дістанемо рекурсію $P_m = pQ_{m-1} + rQ_{m-2}$, $m = 3, 4, \ldots$. Аналогічно можна одержати рекурсію $R_m = rQ_{m-1}$, $m = 3, 4, \ldots$. Таким чином, коефіцієнти Q_m, P_m, R_m, $m = 3, 4, \ldots$, у теоремі 1 можна знайти із рекурсій

$$Q_m = qQ_{m-1} + pQ_{m-2} + rQ_{m-3}, \quad Q_2 = 1, \quad Q_{<0} = 0,$$

$$P_m = pQ_{m-1} + rQ_{m-2}, \quad R_m = rQ_{m-1}, \quad m = 3, 4, \ldots,$$

що дають простий алгоритм їх обчислення.

Теорема 2. *Нехай $x = a + b\sqrt[3]{n} + c\sqrt[3]{n^2}$ є коренем рівняння $x^3 = qx^2 + px + r$, тоді*

$$x^m = A_m + B_m\sqrt[3]{n} + C_m\sqrt[3]{n^2},$$

причому

$$3A_m = \begin{bmatrix} q &&&&&& \\ \frac{2p}{q} & q &&&&& \\ \frac{3r}{p} & \frac{p}{q} & q &&&& \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q &&& \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q && \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m, \tag{4}$$

$$B_m = \begin{bmatrix} b &&&&&& \\ \frac{nc^2-ab}{q} & q &&&&& \\ 0 & \frac{p}{q} & q &&&& \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q &&& \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q && \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m, \quad C_m = \begin{bmatrix} c &&&&&& \\ \frac{b^2-ac}{q} & q &&&&& \\ 0 & \frac{p}{q} & q &&&& \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q &&& \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q && \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m.$$

Доведення. Розкладаючи параперманент (4) за елементами першого стовпця, можна отримати рівності:

$$3A_m = q[]_{m-1} + 2p[]_{m-2} + 3r[]_{m-3} = q(q[]_{m-2} + p[]_{m-3} + r[]_{m-4}) + 2p[]_{m-2} + 3r[]_{m-3} =$$
$$(q^2 + 2p)[]_{n-2} + (qp + 3r)[]_{m-3} + qr[]_{m-4},$$

де символом $[]_m$ позначено параперманент

$$Q_m = \begin{bmatrix} q &&&&&& \\ \frac{p}{q} & q &&&&& \\ \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q &&&& \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q &&& \\ 0 & 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q && \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m.$$

З іншого боку, згідно з теоремою 1, маємо рівності

$$x^m = Q_mx^2 + P_mx + R_m =$$
$$\left((a^2 + 2bcn) + (c^2n + 2ab)\sqrt[3]{n} + (b^2 + 2ac)\sqrt[3]{n^2}\right)Q_m + (a + b\sqrt[3]{n} + c\sqrt[3]{n^2})P_m + R_m =$$
$$((a^2 + 2bcn)Q_m + aP_m + R_m) + \left((c^2n + 2ab)Q_m + bP_m\right)\sqrt[3]{n} + \left((b^2 + 2ac)Q_m + cP_m\right)\sqrt[3]{n^2}.$$

Тому справедливою буде рівність

$$A_m = (a^2 + 2bcn)Q_m + aP_m + R_m.$$

Але, згідно з рівностями (3), маємо $a^2 + 2bcn = \frac{1}{3}(q^2 + 2p)$ і $a = \frac{q}{3}$, отже,

$$3A_m = (q^2 + 2p)[]_{m-2} + q(p[]_{m-3} + r[]_{m-4}) + 3r[]_{m-3} =$$
$$(q^2 + 2p)[]_{m-2} + (qp + 3r)[]_{m-3} + qr[]_{m-4}.$$

□

Параперманент Q_m задовольняє рекурсію

$$Q_m = qQ_{m-1} + pQ_{m-2} + rQ_{m-3}, \quad Q_0 = 1, \quad Q_{<0} = 0.$$

Коефіцієнти A_m, B_m, C_m можна знайти із рекурсій

$$3A_m = qQ_{m-1} + 2pQ_{m-2} + 3rQ_{m-3},$$

$$B_m = bQ_{m-1} + (nc^2 - ab)Q_{m-2},$$

$$C_m = cQ_{m-1} + (b^2 - ac)Q_{m-2}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

2 Рівняння та ірраціональності четвертого степеня

Розглянемо ірраціональності четвертого степеня виду

$$x = a + b\sqrt[4]{n} + c\sqrt[4]{n^2} + d\sqrt[4]{n^3}, \tag{5}$$

де a, b, c, d, n — деякі раціональні числа.

Знаходимо коефіцієнти рівняння четвертого степеня

$$x^4 = qx^3 + px^2 + rx + s,$$

яке задовольняє форма (5). Вони дорівнюють

$$\begin{cases} q = 4a, \\ p = 2(c^2n + 2bdn - 3a^2), \\ r = 4(a^3 + b^2cn + cd^2n^2 - ac^2n - 2abdn) \\ s = d^4n^3 - c^4n^2 + b^4n - a^4 - 2b^2d^2n^2 + 4bc^2dn^2 - 4a^2bdn + 2a^2c^2n - 4ab^2cn - 4acd^2n^2 \end{cases} \tag{6}$$

Знайшовши один корінь діофантового рівняння

$$d^4n^3 - c^4n^2 + b^4n - a^4 - 2b^2d^2n^2 + 4bc^2dn^2 - 4a^2bdn + 2a^2c^2n - 4ab^2cn - 4acd^2n^2 = 1.$$

послідовним піднесенням до степеня можна отримати ряд нових його розв'язків. Тому корисними виявляються наступні теореми.

Теорема 3. *Якщо* $x^4 = qx^3 + px^2 + rx + s$ *і* $x^m = Q_m x^3 + P_m x^2 + R_m x + S_m$, *то виконуються рівності*

$$Q_m = \begin{bmatrix} q \\ \frac{p}{q} & q \\ \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_{m-3}, \quad P_m = \begin{bmatrix} p \\ \frac{r}{q} & q \\ \frac{s}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_{m-3},$$

$$R_m = \begin{bmatrix} r \\ \frac{s}{q} & q \\ 0 & \frac{p}{q} & q \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_{m-3}, \quad S_m = \begin{bmatrix} s \\ 0 & q \\ 0 & \frac{p}{q} & q \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_{m-3},$$

де $m = 4, 5, \dots$.

Доведення. Маємо $x^{m+1} = Q_{m+1}x^3 + P_{m+1}x^2 + R_{m+1}x + S_{m+1}$. Але

$$x^{m+1} = Q_m x^4 + P_m x^3 + R_m x^2 + S_m x = Q_m(qx^3 + px^2 + rx + s) + P_m x^3 + R_m x^2 + S_m x =$$

$$(qQ_m + P_m)x^3 + (pQ_m + R_m)x^2 + (rQ_m + S_m)x + sQ_m.$$

Позаяк коефіцієнти $qQ_m + P_m$, $pQ_m + R_m$, $rQ_m + S_m$, sQ_m є відповідно розкладом парапермаментів Q_{m+1}, P_{m+1}, R_{m+1}, S_{m+1} за елементами першого стовпця, то теорема виконується. □

Розкладаючи парапермакент Q_m у теоремі 3 за елементами останнього рядка, маємо лінійне рекурентне рівняння четвертого порядку

$$Q_m = qQ_{m-1} + pQ_{m-2} + rQ_{m-3} + sQ_{m-4}, \quad Q_3 = 1, \quad Q_{<3} = 0.$$

Розкладаючи парапермакент для P_m за елементами першого стовпця, дістанемо рекурсію $P_m = pQ_{m-1} + rQ_{m-2} + sQ_{m-3}$, $m = 4, 5, \dots$. Аналогічно можна одержати рекурсії $R_m = rQ_{m-1} + sQ_{m-2}$, $S_m = sQ_{m-1}$, $m = 4, 5, \dots$. Таким чином, коефіцієнти Q_m, P_m, R_m, S_m, $m = 3, 4, \dots$, у теоремі 3 можна знайти із рекурсій

$$Q_m = qQ_{m-1} + pQ_{m-2} + rQ_{m-3} + sQ_{m-4}, \quad Q_2 = 1, \quad Q_{<0} = 0,$$

$$P_m = pQ_{m-1} + rQ_{m-2} + sQ_{m-3}, \quad m = 4, 5, \dots,$$

$$R_m = rQ_{m-1} + sQ_{m-2}, \quad m = 4, 5, \dots,$$

$$S_m = sQ_{m-1}, \quad m = 4, 5, \dots,$$

що дають простий алгоритм обчислення коефіцієнтів.

Приклад 2.1. *Нехай* $x^4 = 16x^3 - 56x^2 + 256x - 862$, *тоді* $x^7 = Q_7x^3 + P_7x^2 + R_7x + S_7$. *Користуючись рекурсіями*

$$Q_m = 16Q_{m-1} - 56Q_{m-2} + 256Q_{m-3} - 862Q_{m-4}, \quad Q_3 = 1, \quad Q_{<3} = 0,$$

$$P_m = -56Q_{m-1} + 256Q_{m-2} - 862Q_{m-3},$$

$$R_m = 256Q_{m-1} - 862Q_{m-2},$$

$$S_m = -862Q_{m-1}, \quad m = 4, 5, \dots,$$

отримаємо

$$S_4 = -862, \quad R_4 = 256, \quad P_4 = -56, \quad Q_4 = 16,$$

$$S_5 = -13792, \quad R_5 = 3234, \quad P_5 = -640, \quad Q_5 = 200,$$

$$S_6 = -172400, \quad R_6 = 37408, \quad P_6 = -7966, \quad Q_6 = 2560,$$

$$S_7 = -2206720, \quad R_7 = 482960, \quad P_7 = -105952, \quad Q_7 = 32994.$$

Отже, $x^7 = 32994x^3 - 105952x^2 + 482960x - 2206720$.

Теорема 4. *Нехай* $x = a + b\sqrt[4]{n} + c\sqrt[4]{n^2} + d\sqrt[4]{n^3}$ *є коренем рівняння* $x^4 = qx^3 + px^2 + rx + s$, *тоді*

$$x^m = A_m + B_m\sqrt[4]{n} + C_m\sqrt[4]{n^2} + D_m\sqrt[4]{n^3},$$

причому

$$4A_m = \begin{bmatrix} q \\ \frac{2p}{q} & q \\ \frac{3r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ \frac{4s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m, \tag{7}$$

$$B_m = \begin{bmatrix} b \\ \frac{2cdn-2ab}{q} & q \\ \frac{\alpha}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m,$$

$$C_m = \begin{bmatrix} c \\ \frac{b^2+d^2n-2ac}{q} & q \\ \frac{\beta}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m,$$

$$D_m = \begin{bmatrix} c \\ \frac{2bc-2ad}{q} & q \\ \frac{\gamma}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m,$$

де $\alpha = d^3n^2 + a^2b + bc^2n - b^2dn - 2acdn$, $\beta = a^2c - ab^2 - ad^2n - c^3n + 2bcdn$, $\gamma = a^2d - bd^2n + c^2dn - 2abc + b^3$.

Доведення. Розкладаючи параперманент (7) за елементами першого стовпця, можна отримати рівності:

$$4A_m = q[]_{m-1} + 2p[]_{m-2} + 3r[]_{m-3} + 4s[]_{m-4} = q(q[]_{m-2} + p[]_{m-3} + r[]_{m-4} + s[]_{m-5})+$$

$$2p[]_{m-2} + 3r[]_{m-3} + 4s[]_{m-4} = (q^2+2p)[]_{m-2} + (qp+3r)[]_{m-3} + (qr+4s)[]_{m-4} + qs[]_{m-5},$$

де символом $[]_m$ позначено параперманент

$$Q_m = \begin{bmatrix} q \\ \frac{p}{q} & q \\ \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ 0 & 0 & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{s}{r} & \frac{r}{p} & \frac{p}{q} & q \end{bmatrix}_m.$$

З іншого боку, згідно з теоремою 3, маємо рівності

$$x^m = Q_mx^3 + P_mx^2 + R_mx + S_m =$$

$$((a^3 + 6abdn + 3ac^2n + 3cd^2n^2 + 3b^2cn) + (d^3n^2 + 3a^2b + 3bc^2n + 3b^2dn + 6acdn)\sqrt[4]{n}+$$

$$(3a^2c + 3ab^2 + 3ad^2n + c^3n + 6bcdn)\sqrt[4]{n^2} + (3a^2d + 3bd^2n + 3c^2dn + 6abc + b^3)\sqrt[4]{n^3})Q_m+$$

$$\left((a^2 + 2bdn + c^2n) + (2cdn + 2ab)\sqrt[4]{n} + (b^2 + d^2n + 2ac)\sqrt[4]{n^2} + (2bc + 2ad)\sqrt[4]{n^3}\right) P_m+$$

$$(a + b\sqrt[4]{n} + c\sqrt[4]{n^2} + d\sqrt[4]{n^3})R_m + S_m =$$

$$((a^3 + 6abdn + 3ac^2n + 3cd^2n^2 + 3b^2cn)Q_m + (a^2 + 2bdn + c^2n)P_m + aR_m + S_m) +$$

$$((d^3n^2 + 3a^2b + 3bc^2n + 3b^2dn + 6acdn)Q_m + (2cdn + 2ab)P_m + bR_m)\ \sqrt[4]{n}+$$

$$((3a^2c + 3ab^2 + 3ad^2n + c^3n + 6bcdn)Q_m + (b^2 + d^2n + 2ac)P_m + cR_m)\ \sqrt[4]{n^2}+$$

$$((3a^2d + 3bd^2n + 3c^2dn + 6abc + b^3)Q_m + (2bc + 2ad)P_m + dR_m)\ \sqrt[4]{n^3}.$$

Тому справедливою буде рівність

$$A_m = (a^3 + 6abdn + 3ac^2n + 3cd^2n^2 + 3b^2cn)Q_m + (a^2 + 2bdn + c^2n)P_m + aR_m + S_m.$$

Але, згідно з рівностями (6), маємо $a^3 + 6abdn + 3ac^2n + 3cd^2n^2 + 3b^2cn = \frac{1}{4}(q^3 + 3qp + 3r)$, $a^2 + 2bdn + c^2n = \frac{1}{4}(q^2 + 2p)$ і $a = \frac{q}{4}$, отже,

$$4A_m = (q^3+3qp+3r)[]_{m-3} + (q^2+2p)(p[]_{m-4} + r[]_{m-5} + s[]_{m-6}) + q(r[]_{m-4} + s[]_{m-5}) + 4s[]_{m-4} =$$

$$(q^2 + 2p)[]_{m-2} + (qp + 3r)[]_{m-3} + (qr + 4s)[]_{m-4} + qs[]_{m-5}.$$

□

Для параперманента Q_m справедливою є рекурсія

$$Q_m = qQ_{m-1} + pQ_{m-2} + rQ_{m-3} + sQ_{m-4}, \quad Q_0 = 1, \quad Q_{<0} = 0,$$

коефіцієнти A_m, B_m, C_m, D_m можна знайти із рекурсій

$$4A_m = qQ_{m-1} + 2pQ_{m-2} + 3rQ_{m-3} + 4sQ_{m-4},$$

$$B_m = bQ_{m-1} + (2cdn - 2ab)Q_{m-2} + \alpha Q_{m-3},$$

$$C_m = cQ_{m-1} + (b^2 + d^2n - 2ac)Q_{m-2} + \beta Q_{m-3},$$

$$D_m = dQ_{m-1} + (2bc - 2ad)Q_{m-2} + \gamma Q_{m-3}, \quad m = 1, 2, \dots.$$

Приклад 2.2. *Нехай* $x = 4 + 3\sqrt[4]{2} + 2\sqrt[4]{2^2} + \sqrt[4]{2^3}$ *є коренем рівняння* $x^4 = 16x^3 - 56x^2 + 256x - 862$, *тоді*

$$x^5 = A_5 + B_5\sqrt[4]{2} + C_5\sqrt[4]{2^2} + D_5\sqrt[4]{2^3}.$$

Користуючись рекурсіями

$$4A_m = 16Q_{m-1} - 112Q_{m-2} + 768Q_{m-3} - 3448Q_{m-4},$$

$$B_m = 3Q_{m-1} - 16Q_{m-2} + 26Q_{m-3}, \quad C_m = 2Q_{m-1} - 5Q_{m-2} - 4Q_{m-3},$$

$$D_m = Q_{m-1} + 4Q_{m-2} - 3Q_{m-3}, \quad Q_m = 16Q_{m-1} - 56Q_{m-2} + 256Q_{m-3} - 862Q_{m-4},$$

$$Q_0 = 1, \quad Q_{<0} = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

отримаємо

$$4A_1 = 16, \quad B_1 = 3, \quad C_1 = 2, \quad D_1 = 1, \quad Q_1 = 16,$$

$$4A_2 = 144, \quad B_2 = 32, \quad C_2 = 27, \quad D_2 = 20, \quad Q_2 = 200,$$

$$4A_3 = 2176, \quad B_3 = 370, \quad C_3 = 316, \quad D_3 = 261, \quad Q_3 = 2560,$$

$$4A_4 = 27400, \quad B_4 = 4896, \quad C_4 = 4056, \quad D_4 = 3312, \quad Q_4 = 32994,$$

$$4A_5 = 339616 \Rightarrow A_5 = 84904, B_5 = 63222, C_5 = 52388, D_5 = 42634.$$

Отже, $x^5 = 84904 + 63222\sqrt[4]{2} + 52388\sqrt[4]{2^2} + 42634\sqrt[4]{2^3}$.

Література

1. Вороной Г.Ф. Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей. Докторская диссертация, Варшава, 1896 г.
2. Делоне Б.Н., Фаддеев Д.К. Теория иррациональностей третьей степени – М.: Изд-во АН СССР, 1940. – 340 с.
3. Заторський Р.А. Числення трикутних матриць та його застосування – Івано-Франківськ: Вид-во Сімик, 2010. – 508 с.
4. Steuding J., *Diophantine Analysis*, Chapman-Hall, CRC Press, 2005.

Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України,
Львів, Україна.

Надійшло 28.02.2011

Semenchuk A.V. *About some algorithms of calculations for the cube fields and fields of fourth degree*, Carpathian Mathematical Publications, **3**, 1 (2011), 130–138.

The effective algorithms of calculations are built in the cube fields and fields of fourth degree.

Семенчук А.В. *О некоторых алгоритмах вычислений для кубических полей и полей четвертой степени* // Карпатские математические публикации. — 2011. — Т.3, №1. — С. 130–138.

Построены эффективные алгоритмы вычислений в кубических полях и полях четвертой степени.

Науковий журнал

Карпатські Математичні Публікації

(свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 14703-3674Р)

Том 3, №1
2011

Відповідальний за випуск д.ф.-м.н. Загороднюк А.В.
Літературна редакція Лабачук О.В.
Комп'ютерна правка та макетування Кравців В.В.

Підписано до друку 23.05.2011 р. Формат 60×84/8.
Папір офсетний. Друк цифровий. Гарнітура Computer Modern
Умовн. друк. аркушів 17,25. Наклад 300 примірників.
Замовлення 184 від 23.05.2011.

Друк: пп Голіней О.М.
м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 128
тел. 0342 58 04 32